



facebook.com/ToanHocThuVi

# TOÁN HỌC KÌ THỨ

1/2016

## TÌM HIỂU

### + Toán học kì thú

Chứng đồng giác, Bánh xe vuông, Điểm bất động, Hiệu ứng cánh bướm,...

## KHÁM PHÁ

### + Các bài viết dài

Nghịch lí Đẳng toàn năng, Nghịch lí Khách sạn Vô hạn, Nghịch lí Peterburg,...

### + Các nghịch lí **Toán học**

Nghịch lí Đẳng toàn năng, Nghịch lí Khách sạn Vô hạn, Nghịch lí Peterburg,...

## GIẢI ĐÁP

### + Các bài Toán thú vị

Một đồng biến mất, Bài Toán đàn bò của Archimedes, Tắt mở bóng đèn,...



Một  
thế giới khác  
của **Toán học**.

# LỜI NÓI ĐẦU

Nhắc đến Toán học, chắc hẳn bạn sẽ cảm thấy thật ngán ngẩm, có khi là ghét và cả sợ hãi nữa. Đó là vì bạn chưa hiểu được Toán học, chưa biết được thực sự bản chất Toán học là như thế nào? Và cũng không biết rằng Toán học cũng có chất thơ riêng. Lí do đơn giản là vì bạn không được tiếp cận với những thông tin kì thú đó, ở trường học cũng như cuộc sống hằng ngày. Đối với hầu hết mọi người, Toán chỉ là một môn học tính Toán và xử lí với những con số, biểu thức, điểm và đường thẳng.

Chúng ta đang sống trong một đất nước mà sự giáo dục, học hỏi chỉ là một thủ tục mà không quan tâm đến tri thức, không màng đến cốt lõi và không gieo được hạt giống đam mê cho người học.

-TOÁN HỌC KÌ THÚ- là một dự án ra đời với mong muốn ít nhiều khắc phục điều đó, bạn sẽ cảm thấy Toán học gần gũi hơn.

Ý tưởng của Toán học kì thú là dùng một kênh thông tin phổ biến mà mọi người dễ dàng tiếp cận được, và không gì tốt hơn mạng xã hội. Youtube là mục tiêu đầu tiên mà Toán học kì thú muốn nhắm đến, đưa thông tin dưới dạng video, vì xem sẽ “dễ” hơn là đọc, đặc biệt là với chủ đề Toán học cần lời nói diễn giải cũng như hình ảnh minh hoạ.

Nhưng vì nhiều lí do về mặt kĩ thuật (máy móc, thiết bị) cũng như đội ngũ (thực ra chỉ có một người) nên Toán học kì thú đã chọn Facebook làm kênh thông tin chính của mình với địa chỉ:

<https://facebook.com/ToanHocThuVi>

Trong tương lai, Toán học kì thú sẽ cố gắng mở rộng hoạt động qua Youtube.

Chính thức đi vào hoạt động từ năm 2012, Toán học kì thú đã và đang được phát triển, tuy có chậm chạp vì như đã nói, “đội ngũ” hiện nay chỉ có một người. Với cách thức hoạt động không như những trang Toán học khác, Toán học kì thú luôn sẵn lòng, tìm kiếm những thông tin kì thú, hấp dẫn, ít được biết đến với chủ đề Toán học nhưng vẫn đảm bảo tính đại chúng, không quá chuyên ngành, đại đa số người đọc sẽ hiểu được, mang đến cho mọi người một cái nhìn khác về Toán học.

Nhân dịp kỉ niệm hơn 3 năm hoạt động, Toán học kì thú xuất bản một tựa sách tuyển tập gồm tất cả những bài viết, hình ảnh đã được đăng trên facebook cùng với 7 bài viết khác chưa được công bố như một lời cảm ơn đến với gần 6000 người hâm mộ. Hơn nữa, hi vọng là tập sách bé nhỏ này phần nào xoá tan đi được sự sợ hãi, ghét bỏ Toán học.

Sách được Toán học kì thú hoàn toàn chịu trách nhiệm nội dung và đảm bảo bản quyền, riêng phần hình ảnh hầu như được sưu tầm từ Internet.

Sự sai sót và nhầm lẫn là điều không thể tránh khỏi. Mọi ý kiến, đóng góp, các bạn có thể liên hệ trực tiếp qua địa chỉ trên hoặc qua hòm thư email: [toanhockithu@hotmail.com](mailto:toanhockithu@hotmail.com).

Sau cùng, Toán học kì thú gửi lời chúc sức khoẻ đến với các bạn. Hãy luôn yêu thích Toán học và ủng hộ Toán học kì thú nhé!

*Vũng Tàu, ngày 2 tháng 11 năm 2015*

**Toán học kì thú**



# PHẦN I: TOÁN HỌC KÌ THÚ

Chúng đồng giác.....	5	Tiên đề chọn.....	28
Ai là người phát hiện ra nhật thực? .....	5	Lát mặt phẳng .....	29
Xác suất.....	6	0,999999999999.....=1.....	30
Những phép tính kì thú .....	8	Số 7 .....	31
“Số 0 như một quả ngư lôi” .....	9	Đơn hình .....	32
Số 12 .....	10	Gấp đôi tờ giấy lại.....	34
Mọi số đều thú vị .....	10	Đố mẹo.....	36
Bánh xe vuông.....	11	Số hoàn hảo.....	37
Số Narcissus .....	12	Số 3 ở khắp mọi nơi? .....	37
Ngày 29 tháng hai.....	13	Các con số.....	38
Crucifixion.....	14	& những phép toán.....	38
Định lí điểm bất động Brouwer .....	15	Số nguyên tố khó tin .....	40
Tô màu bản đồ.....	16	666.....	40
Lý thuyết nút.....	17	Bạn ở vị trí nào trong số pi? .....	41
The Time Machine .....	18	2519.....	41
Dùng Toán đánh bạc .....	19	Kích thước giấy .....	42
Chai Klein .....	19	ROKE1984 .....	44
Leonhard Euler và logo của Google.....	20	Số 7 định mệnh .....	45
George Boole và logo của Google.....	21	Dyscalculia.....	45
Một phép tính thú vị.....	21	Thắc mắc .....	45
69! .....	21	Số la mã .....	46
Điểm bất động.....	22	Toán học và điện ảnh .....	47
Hiệu ứng cánh bướm.....	23	Các sự thật kì thú về Toán học.....	48
Hằng số Kaprekar .....	24	Biểu diễn số nguyên tố.....	50
Ảo thuật toán học với những lá bài .....	25	Sudokube .....	50
Tesseract.....	26	Tâm tỉ cự .....	50
Toán học: Khám phá hay phát minh?.....	27	Nghịch đảo 998001.....	51





# CHỨNG ĐỒNG GIÁC

Đồng giác là khả năng mà người mắc phải (hay có được?) sẽ có sự cảm nhận lạ thường về các con số. Đặc biệt nhất là khả năng nhận ra ngay được một số bất kì có phải là số nguyên tố hay không mà không phải trải qua bất kì thuật Toán nào.

Số nguyên tố là số chỉ chia hết cho 1 và chính nó, trừ số 1 ra. Chẳng hạn, bạn có thể trả lời ngay trong 1 giây, số 35767509 có phải là số nguyên tố hay không? Để từ đó thấy được khả năng này là kì lạ như thế nào.

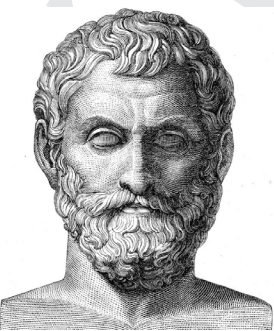
Đối với một người mắc phải (hay có được?) chứng đồng giác, dưới con mắt của họ, các con số cũng như những màu sắc. Đó là lí do họ cảm nhận con số, chứ không tính toán nó.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Người mắc phải (hay có được??) chứng đồng giác luôn là những người mắc cả chứng tự kỉ. Chưa có trường hợp nào ghi nhận người mắc phải (hay có được??) chứng đồng giác mà không bị tự kỉ. Vì thế mà cho nên, chúng ta dùng cả hai từ “mắc phải” hay “có được” chứng đồng giác. Nếu không bị tự kỉ, ta dùng từ “có được”, vì khả năng này thật tuyệt vời, nhưng đi kèm với tự kỉ thì chẳng ai muốn, nên ta dùng từ “mắc phải”.

Đến nay, Khoa học vẫn chưa thể nào giải thích được hiện tượng kì lạ này.

## AI LÀ NGƯỜI PHÁT HIỆN RA NHẬT THỰC?



Hẳn các bạn sẽ nghĩ đến một nhà Vật lí nào đó. Nhưng không, đó là một nhà Toán học, Triết học, Thales (phiên âm thường gặp ở sách giáo khoa là Ta-Lét, khoảng 624 TCN – khoảng 546 TCN).

Ông cũng được xem là một nhà triết gia đầu tiên trong nền triết học Hy Lạp cổ đại, là “cha đẻ của khoa học”. Tên của ông được dùng để đặt cho một định lý Toán học do ông phát hiện ra, định lí Thales, áp dụng cho việc chứng minh tam giác đồng dạng, lớp 8.

Thales cho rằng nguồn gốc của mọi vật là nước.

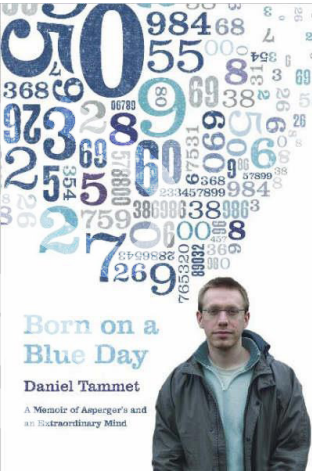
Ngoài Toán học, ông còn quan tâm đến đời sống sinh hoạt của con người, theo cái nhìn của một nhà Khoa học: phương pháp đào sông, định phương hướng đi biển,...

Ông là người đầu tiên đã phát hiện ra Nhật thực vào ngày 25 tháng 5 năm 585 TCN.

Trên hình là bức tượng điêu khắc chân dung của ông. Ngoài ra, không có bất kì một hình ảnh nào khác mô tả diện mạo của ông nữa.

### DANIEL TAMMET

Daniel Tammet là một trong chưa đến 100 “thiên tài kỳ lạ” của thế giới, tức những người mắc chứng tự kỷ hoặc các rối loạn khác về thần kinh nhưng sở hữu những khả năng hơn người.



Anh trốn vui năm tháng ấu thơ trong thế giới của những con số. Chữ số là những “sinh vật” biết sống, biết thở, là người bạn duy nhất của Daniel... Năm 25 tuổi, anh được chẩn đoán mắc bệnh Asperger, một dạng bệnh tự kỷ làm hạn chế khả năng giao tiếp hoặc xây dựng mối quan hệ với những người khác.

Tạo hóa lấy đi của Daniel kỹ năng sống của một người bình thường, nhưng lại cho anh một khả năng kỳ lạ khác: anh mắc CHỨNG ĐỒNG GIÁC, tức nhìn thấy những con số có hình dạng, màu sắc và cấu tạo khác nhau. Ví dụ, “số 1 thì sáng chói, như có người dùng đèn pin rọi vào mắt tôi, Số 5 giống như tiếng sấm hay tiếng sóng đánh vào ghềnh đá, Số 37 nhào nhoét như cháo, còn số 89 làm tôi nhớ đến tuyết rơi” - Daniel giải thích.

Cảm nhận kỳ lạ này đã biến Daniel Tammet thành “phù thủy” của những con số, với tài nhớ và làm toán siêu phàm. Năm 2004, anh lập kỷ lục châu Âu sau khi nhớ và đọc ra chính xác 22.514 chữ số của dãy số pi trong liên tục 5 giờ! Nhiều nhà chuyên môn đã nghiên cứu bộ não kỳ lạ của Daniel và đi đến kết luận anh có năng khiếu thiên bẩm thật sự, chứ không chỉ là cố gắng “nhớ hủ họa” những con số.

Daniel Tammet đã viết sách tự truyện về mình mang tên Born on a Blue day (Sinh vào ngày xanh).

## XÁC SUẤT

Không cần phải nói ra, các bạn cũng biết xác suất là gì và nó có ý nghĩa như thế nào với cuộc sống. Xác suất cho chúng ta biết khả năng xảy ra một biến cố trong loạt các sự kiện khả dĩ có thể xảy ra, chẳng hạn: tỉ lệ thành công của một cuộc phẫu thuật là vào khoảng bao nhiêu phần trăm, xác suất trúng độc đắc, khả năng xúc xắc rơi vào điểm 6,...

Xác suất được đưa vào chương trình phổ thông lớp 11, gắn liền với xác suất đó là thống kê (điều tra, thu thập, xử lí số liệu) xuất hiện ở lớp 10. Có 3 kiểu định nghĩa về xác suất: theo nghĩa cổ điển, theo nghĩa hình học và theo tiên đề của Kolmogorov. Trong đó, định nghĩa thứ 3 mang tính chất phổ quát nhất. Học sinh lớp 11 chỉ học định nghĩa xác suất theo nghĩa cổ điển.

Ứng dụng:

Tôi có một bài Toán:

Hai người hẹn gặp nhau tại một địa điểm nọ lúc 7h đến 8h30, mỗi người có thể đến bất cứ lúc nào trong khoảng thời gian này.

Người đến trước sẽ điện thoại cho người kia biết, và nếu chờ quá 30 phút mà người kia không đến thì bỏ đi.

Tính xác suất để hai người gặp nhau?

Rõ ràng là không thể nào dùng định nghĩa xác suất cổ điển để giải quyết bài Toán này, tổ hợp, chỉnh hợp không có tác dụng.

Lời giải ngắn gọn như sau, sử dụng xác suất hình học:

Giả sử hai người mà ta gọi là A,B lần lượt đến điểm hẹn lúc x,y giờ; x,y thuộc khoảng từ 7h đến 8h30.

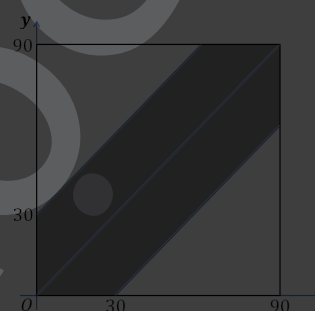
Để đơn giản bài Toán, chúng ta hoàn toàn có thể xem x,y thuộc khoảng từ 0 phút đến 90 phút.

Như vậy, ta có hiểu mỗi một thời điểm trong khoảng thời gian trên tương ứng với một điểm trên một hình vuông độ dài cạnh là 90, diện tích hình vuông này là  $90 \times 90 = 8100$ .

Khi một người đến mà chờ quá 30 phút, tức là độ chênh lệch giữa x và y là quá 30 phút, thì người đó bỏ về.

Do đó, ta có hiểu mỗi một thời điểm trong khoảng thời gian mà x, y chênh lệch không quá 30 phút tương ứng với một điểm trên một hình có phương trình  $|x-y| \leq 30$ .

Chiếu trên hệ trục tọa độ cả hai hình trên, dễ dàng tính được diện tích hình thứ hai là  $90^2 - 60^2 = 4500$ .



Vậy xác suất để hai người gặp nhau là  $4500/8100 = 5/9$ , tức là vào khoảng 56%.

Đây là một bài Toán đơn giản nhưng khá thú vị, thực tế. Mục đích của admin là chỉ muốn giới thiệu nó cho những ai không học Xác suất Cao cấp ở bậc Đại học, Cao đẳng hiện nay.

## 2. Place Your Bets

What is the probability it hits blue?



Blue Area  
Total Area

Tôi sẽ nói sơ qua về xác suất theo nghĩa hình học. Vấn đề đặt ra như sau:

Giả sử bạn có một tờ giấy hình tròn như trên hình, được chia ra làm hai phần xanh lá và xanh dương.

Bạn nhắm mắt, chỉ tay lên tờ giấy một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để bạn chỉ vào phần xanh dương (hoặc xanh lá)?

Rõ ràng bạn không thể dùng nghĩa xác suất thông thường để xử lí bài Toán này, nó không có bất cứ số liệu gì xử lí cả. Chính vì vậy, định nghĩa xác suất theo nghĩa hình học được ra đời. Câu trả lời cho bài Toán chính là diện tích phần xanh dương (hay xanh lá) chia cho diện tích của cả hình tròn.

Định nghĩa như thế là chính xác, hơn nữa nó còn phù hợp với định nghĩa xác suất theo tiên đề của Kolmogorov.



## NHỮNG PHÉP TÍNH KÌ THÚ

### Số 1

$$1 \times 1 = 1$$

$$11 \times 11 = 121$$

$$111 \times 111 = 12321$$

$$1111 \times 1111 = 1234321$$

$$11111 \times 11111 = 123454321$$

$$111111 \times 111111 = 12345654321$$

$$1111111 \times 1111111 = 1234567654321$$

$$11111111 \times 11111111 = 123456787654321$$

$$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$$

### Số 8

$$1 \times 8 + 1 = 9$$

$$12 \times 8 + 2 = 98$$

$$123 \times 8 + 3 = 987$$

$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$

$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$

$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$

$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$

$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$

$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

### 1 VÀ 9

$$1 \times 9 + 2 = 11$$

$$12 \times 9 + 3 = 111$$

$$123 \times 9 + 4 = 1111$$

$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$

$$12345 \times 9 + 6 = 111111$$

$$123456 \times 9 + 7 = 1111111$$

$$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$$

$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$

$$123456789 \times 9 + 10 = 1111111111$$

### KHÔNG CÓ 8

$$12345679 \times 9 = 111111111$$

$$12345679 \times 18 = 222222222$$

$$12345679 \times 27 = 333333333$$

$$12345679 \times 36 = 444444444$$

$$12345679 \times 45 = 555555555$$

$$12345679 \times 54 = 666666666$$

$$12345679 \times 63 = 777777777$$

$$12345679 \times 72 = 888888888$$

$$12345679 \times 81 = 999999999$$

### Lại là 9

$$9 \times 9 = 81$$

$$99 \times 99 = 9801$$

$$999 \times 999 = 998001$$

$$9999 \times 9999 = 99980001$$

$$99999 \times 99999 = 9999800001$$

$$999999 \times 999999 = 999998000001$$

$$9999999 \times 9999999 = 99999980000001$$

$$99999999 \times 99999999 = 9999999800000001$$

$$999999999 \times 999999999 = 999999998000000001$$

### 8 VÀ 9

$$9 \times 9 + 7 = 88$$

$$98 \times 9 + 6 = 888$$

$$987 \times 9 + 5 = 8888$$

$$9876 \times 9 + 4 = 88888$$

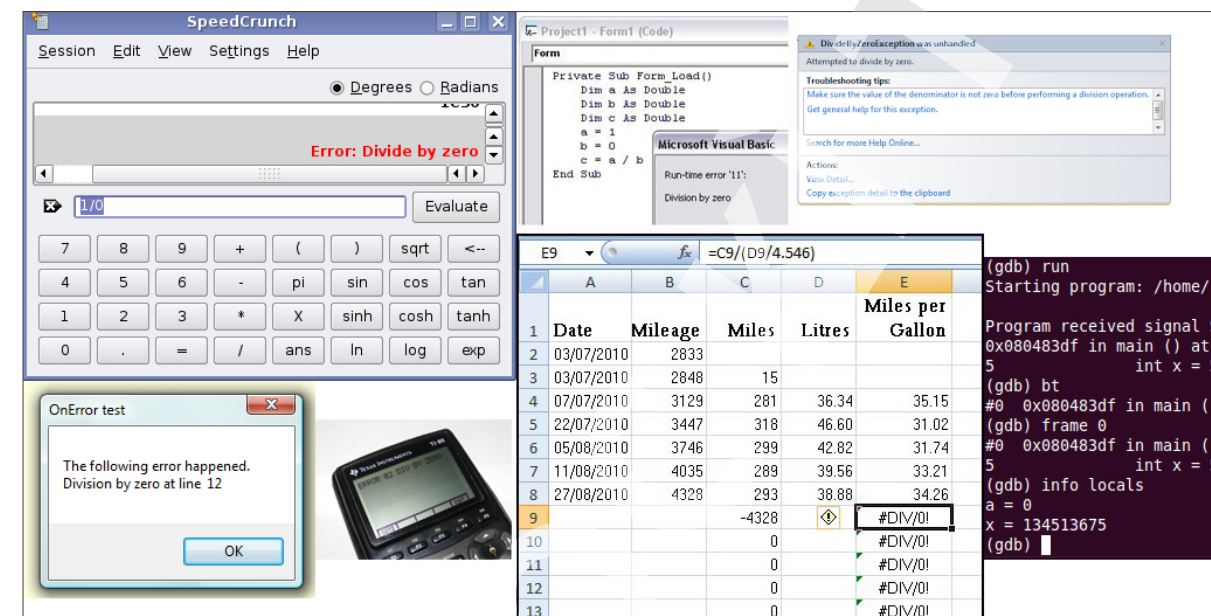
$$98765 \times 9 + 3 = 888888$$

$$987654 \times 9 + 2 = 8888888$$

$$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$$

$$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$$

## “SỐ 0 NHƯ MỘT QUẢ NGƯ LÔI”



T háng 9 năm 1997, trong khi thực hiện chiến dịch cắt giảm chi phí, hệ thống động cơ đẩy của con tàu bất ngờ ngưng hoạt động. Cùng với đó là toàn bộ máy cũng mất chức năng trong 2 giờ 45 phút ngoài Đại Tây Dương.

Các lỗi hệ thống bị gây nên bởi một nguyên do tưởng chừng như rất tầm thường, đó là phần mềm máy tính thực hiện một câu lệnh “chia cho 0” để rồi từ đó, nó không thể “chạy” tiếp được.

Thật may mắn lỗi xảy ra khi con tàu đang không tham chiến, vì nếu không thì chắc chắn nó đã bị đánh chìm. Bởi vậy, báo chí khi ấy có đăng tin: “Số 0 đánh vào USS Yorktown như một quả ngư lôi”.

Số 0 vẫn ẩn đi trong mã phần mềm, bộ nhớ hệ thống máy tính đã phải thực hiện một cố gắng vô ích để cố mà chia cho nó. Phải mất hai ngày, các kỹ sư và các nhà phân tích hệ thống mới tìm ra nguyên nhân vấn đề.

Việc chia cho 0 là không thể được, vì nếu không thì mọi sự vô lý điên rồ sẽ phải xảy ra, chẳng hạn có thể chúng mình dễ dàng  $0=1$  hay bất kì số nào khác, làm cho vũ trụ này vô trật tự, không có quy tắc, hỗn loạn, và vô nghĩa.

- TOÁN HỌC KÌ THỨ -

Đỗ Minh Triết

Blog: <http://toanhockithu.wordpress.com/>,

Facebook: <https://www.facebook.com/ToanHocThuVn>





# SỐ 12

Số 12 được xem là con số may mắn trong quan niệm của nhiều văn hóa.

12 bằng 6 cộng 6, tổng của hai số hoàn hảo. Số ước của nó cũng là số 6 hoàn hảo.

Một năm có 12 tháng.  
Một ngày chia làm hai giai đoạn, mỗi giai đoạn có 12 giờ.  
Trong một ngày, 12 giờ trưa là thời điểm bức xạ mặt trời đến mặt đất nhiều nhất.  
12 giờ khuya là thời điểm chuyển giao giữa hai ngày.  
Trong thần thoại Hy Lạp, đỉnh Olympus có 12 vị thần.  
Trong chiêm tinh học, có 12 chòm sao Hoàng Đạo.  
Có 12 con giáp.  
Trong Toán học, bạn hay gặp 7 hằng đẳng thức đáng nhớ.  
Đời học sinh có 12 năm.

Có lẽ vì tượng trưng cho sự hoàn hảo, ngày 21 Tháng Mười Hai 12 năm 2012 không thể là ngày Tận thế.

## MỌI SỐ ĐỀU THÚ VỊ



Chạy một chiếc xe đạp thông thường trên một con đường bằng phẳng thì bạn đã biết rồi đấy, bánh xe lướt trên mặt đường một cách trơn tru không xóc nảy. Nhưng còn đối với bánh xe vuông thì như thế nào nhỉ? Điều chắc chắn là chẳng thể nào đạp nổi một vòng, mà dù đi được thì cực kì xóc.

Vấn đề ở đây là liệu có một bề mặt nào mà tại đó, việc đi trên một phương tiện với bánh xe vuông sẽ trơn tru, mượt mà như khi đi trên một đường phẳng với bánh xe tròn?



## BÁNH XE VUÔNG

Thật ngạc nhiên là có. Đó chính là bề mặt như trên hình. Thú vị ở chỗ nếu nhắm mắt mà chạy thì bạn sẽ ngỡ như mình đang đi trên một chiếc xe đạp thông thường trên một con đường phẳng. Bánh xe hoàn toàn ăn khớp với mặt đường.

Thoạt nhìn, nó như những nửa đường tròn liên tiếp nhau nhưng không phải, chính xác nó là các phần đồ thị của một hàm Hyperbolic: hàm cosh, liên tiếp nhau.

Trong Toán học, hàm Hyperbolic có những tính chất tương tự như các hàm lượng giác thông thường. Những hàm Hyperbolic cơ bản gồm sin hyperbolic “sinh”, và cosin hyperbolic “cosh”, hàm tang hyperbolic “tanh”.

Có thể là bạn sẽ thắc mắc thêm là vậy với những loại bánh xe có hình thù khác thì bề mặt tương ứng với nó để phương tiện có thể chạy được trơn tru sẽ được tìm ra như thế nào? Một công cụ Toán học sẽ giúp giải quyết vấn đề này đó là Phương trình Vi phân.

Việc nghiên cứu những vấn đề như thế này giúp khám phá ra nhiều điều, bề mặt địa hình; đặc điểm, tính chất của các hàm.

- TOÁN HỌC KÌ THỨ -

Đỗ Minh Triết

Blog: <http://toanhockithu.wordpress.com/>.

Facebook: <https://www.facebook.com/ToanHocThuVi>



tìm hiểu về

## SỐ NARCISSUS

Narcissus là tên gọi để chỉ một nhóm cây dạng thân hành cứng, chủ yếu ra hoa về mùa xuân, trong tiếng Việt có tên gọi chung là Thủy tiên. Tên gọi Narcissus có nguồn gốc từ tên gọi của một nhân vật thần thoại Hy Lạp.

Đối với Toán học, Narcissus còn là tên của một loại số. Số Narcissus, còn gọi là số Armstrong của một số gồm n chữ số là số mà tổng các lũy thừa bậc n của các chữ số bằng chính số đó.

Ví dụ:

-Các số Narcissus có n=3:

$$\begin{aligned}153 &= 1^3 + 5^3 + 3^3 \\370 &= 3^3 + 7^3 + 0^3 \\371 &= 3^3 + 7^3 + 1^3 \\407 &= 4^3 + 0^3 + 7^3\end{aligned}$$

-Các số Narcissus có n=4:

$$\begin{aligned}1634 &= 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4 \\8208 &= 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4 \\9474 &= 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4\end{aligned}$$

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 hiển nhiên là các số Narcissus.

Ngoài chúng ra, 153 là số Narcissus nhỏ nhất.

Số Narcissus lớn nhất có 39 chữ số:  
115132219018763992565095597973971522401

Số Narcissus trong các hệ cơ số khác:  
0, 1, 2, 12, 122 trong hệ thống cơ số 3.  
0, 1, 2, 3, 313 trong hệ thống cơ số 4.

tìm hiểu về

## NGÀY 29 THÁNG HAI



### LỊCH SỬ HÌNH THÀNH VÀ NHỮNG VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

Ngày 29 tháng 2 chỉ xảy ra vào năm nhuận, là ngày thứ 60 trong một năm nhuận của lịch Gregory. Theo định nghĩa, năm nào có ngày này là năm nhuận. Nó chỉ xuất hiện mỗi bốn năm một lần như 1996, 2000, 2004, 2008, 2012 và 2016.

Liên quan đến vấn đề này, một câu hỏi khác được đặt ra: Tại sao tháng 2 lại có 28 ngày (năm nhuận 29 ngày) trong khi các tháng khác trong năm đều có 30 hoặc 31 ngày?

Ví những năm 46 trước Công nguyên, thống soái La Mã Julius César khi định ra lịch dương, quy định ban đầu là mỗi năm có 12 tháng, tháng lẻ là tháng đủ, 31 ngày; tháng chẵn là tháng thiếu, 30 ngày. Tháng 2 là tháng chẵn lẻ ra cũng phải có 30 ngày. Nhưng nếu tính như vậy thì một năm không phải có 365 mà là 366 ngày. Do đó phải tìm cách bớt đi một ngày trong một năm.

### VẬY THÌ BỚT ĐI MỘT NGÀY TRONG THÁNG NÀO?

Lúc đó, theo tập tục của La Mã, rất nhiều phạm nhân đã bị xử tử hình, đều bị chấp hành hình phạt vào tháng 2, cho nên mọi người cho rằng tháng đó là tháng không may mắn. Trong một năm đã phải bớt đi một ngày, vậy thì bớt đi một ngày trong tháng 2, làm cho tháng không may mắn này bớt đi một ngày là tốt hơn. Do đó tháng 2 còn lại 29 ngày, đó chính là lịch Julius.

Sau này, khi Augustus kế tục Julius César lên làm Hoàng đế La Mã. Augustus đã phát hiện ra Julius César sinh vào tháng 7, theo lịch Julius thì tháng 7 là tháng đủ, có 31 ngày, Augustus sinh vào tháng 8, tháng 8 lại luôn là tháng thiếu, chỉ có 30 ngày. Để biểu thị sự tôn nghiêm như Julius César, Augustus đã quyết định sửa tháng 8 thành 31 ngày. Đồng thời cũng sửa lại các tháng khác của nửa năm sau. Tháng 9 và tháng 11 ban đầu là tháng đủ thì sửa thành tháng thiếu. Tháng 10 và tháng 12 ban đầu là tháng thiếu sửa thành tháng đủ. Như vậy lại nhiều thêm một ngày, làm thế nào đây? Lại lấy bớt đi một ngày trong tháng 2 không may mắn nữa, thế là tháng 2 chỉ còn 28 ngày.

Hơn 2.000 năm trở lại đây, sở dĩ mọi người vẫn tiếp tục dùng cái quy định không hợp lý này chỉ vì nó là một thói quen. Những người nghiên cứu lịch sử trên thế giới đã đưa ra rất nhiều phương án cải tiến

cách làm lịch, họ muốn làm cho lịch được hợp lý hơn.

Trở lại Lịch Gregory. Như chúng ta biết, Lịch Gregory là một bộ lịch mới do Giáo hoàng Grêgôriô XIII đưa ra vào năm 1582. Lịch Gregory chia thành 12 tháng với 365 ngày, cứ 4 năm thì thêm một ngày vào cuối tháng 2 tạo thành năm nhuận. Vì vậy theo lịch Julius thì một năm có 365,25 ngày. Nhưng độ dài của năm mặt trời là 365,242216 ngày cho nên lịch Julius dài hơn khoảng 0,0078 ngày trong một năm, tức là khoảng 11 phút 14 giây.

Để bù vào sự khác biệt này thì cứ 400 năm ta sẽ bỏ bớt đi 3 ngày năm nhuận. Cho đến năm 1582, thì sự sai biệt đã lên đến 10 ngày. Giáo Hoàng Gregory XIII quyết định bỏ 10 ngày trong tháng 10 năm đó để cho lịch và mùa màng tương ứng trở lại. Sau ngày 4 tháng 10 năm 1582 là ngày 15 tháng 10. Và để tránh sai biệt, lịch lấy năm nhuận là năm có số thứ tự chia hết cho 4 (như năm 1964, 1980, 2004, ...) và các năm tận cùng bằng 00 phải chia hết cho 400 mới là năm nhuận (năm 2000 chia hết cho 4 và 400 nên là năm nhuận, những năm 1700 1800 và 1900 chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 400 nên không phải là năm nhuận, ...). Lịch đã sửa mang tên lịch Gregory và được áp dụng cho đến bây giờ.

### NGÀY 29 THÁNG 2 NGÀY NAY RA SAO?

Nói về ngày này thì trước tiên : Đứa trẻ nào chào đời vào đúng ngày 29 tháng 2 mà muốn mừng sinh nhật đúng ngày,thì phải đợi đến 4 năm nữa. Lý do tháng này năm nay có ngày nhuận, có đến 29 ngày chứ không phải 28 ngày như của mọi tháng Hai khác.

Tại một số quốc gia, để tiện việc, chính phủ sở tại có thể cho đứa trẻ sinh ra trong ngày 29 tháng Hai được kê trong giấy khai sinh là sinh ngày 28 tháng Hai hay sinh ngày 1 tháng Ba. (Theo tập tục của Pháp. Tùy cha mẹ chọn ngày sinh 28 -29- hoặc 1tháng 3).

Ngoài ra ngày 29 tháng 2 còn là Ngày phái đẹp tỏ tình. Cứ 4 năm mới có một ngày 29/2, ngày này ở châu Âu được coi là “Ngày phụ nữ tỏ tình” - tức là phái đẹp chủ động cầu hôn với giới mày râu.

Đây là phong tục lâu đời ở Anh, người Scotland đã thông qua đạo luật lấy ngày 29/2 là “Ngày quyền lợi phụ nữ”. Hồi đó, Nữ hoàng Margarit đã tuyên bố: Trong ngày này phụ nữ có thể cầu hôn với đàn ông và tiến hành trừng phạt những gã đàn ông thích thả dê nhưng lại chối bỏ trách nhiệm.

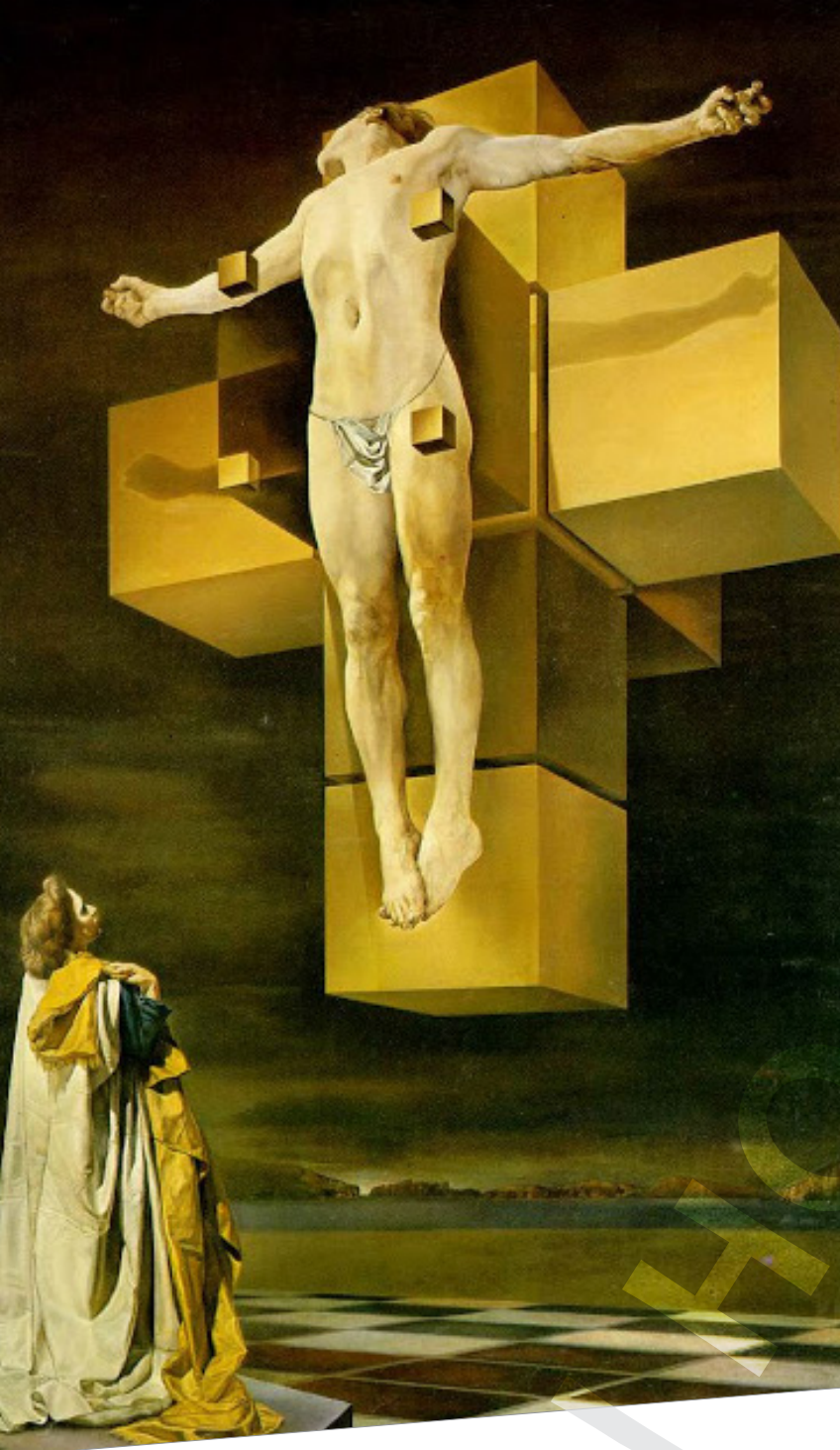
Từ thế kỷ XVII, phong tục này đã lan ra khắp châu Âu. Ngày 29/2/2004 đã có hơn 7.000 phụ nữ Anh chủ động cầu hôn, trong đó có cô MC một đài truyền hình đã cầu hôn bạn trai ngay trên sóng truyền hình và đã thành công.

Hiện nay, những vị mày râu nào từ chối lời cầu hôn của bạn gái trong ngày này sẽ phải nộp 1 Bảng tiền “thể chấp” hoặc phải tặng một tấm áo lụa cho người con gái bị tổn thương, nhưng tình huống này rất hiếm khi xảy ra.

Theo thống kê, trong ngày 29/2 lần trước có tới 92% đàn ông được ngỏ lời đã vui mừng chấp nhận tình cảm của bạn gái, 4% lúc đầu không đồng ý vì bất ngờ, nhưng sau khi suy nghĩ đã vui vẻ chấp thuận. Đối với nhiều phụ nữ Anh, 29/2 là một ngày có ý nghĩa quyết định trong cuộc đời.

Trong lịch sử đã có rất nhiều nhân vật nổi tiếng đã nên duyên nhờ chủ động cầu hôn trong ngày này. Tiêu biểu là nữ minh tinh điện ảnh người Hungary G. Garbo. Bà từng tuyên bố: Cả 9 người chồng trong cuộc đời đều do bà chủ động cầu hôn và bà giải thích “phụ nữ phải hướng dẫn ý thích của đàn ông”.





## CRUCIFIXION

Trên một bức tranh, người họa sỹ phải thể hiện những cảm giác của không gian nhiều chiều lên một phẳng giấy hai chiều. Các họa sỹ tượng hình thời kì đế chế La Mã Byzantine đã miêu tả cảnh hành lễ tôn giáo 3 chiều trên một không gian 2 chiều, đem lại khung cảnh đáng vẻ hết sức huyền bí.

Trong suốt thời kì Phục Hưng, các họa sỹ đã sử dụng hình học xạ ảnh để biến bức tranh phẳng thành thế giới 3 chiều nhằm chuyển tải xúc cảm của mình.

Ngày nay, Toán học đóng vai trò tích cực trong việc khơi gợi niềm cảm hứng và cung cấp những công cụ cho quá trình sáng tạo cũng như truyền đạt các ý tưởng của nghệ sỹ. Họ dùng Toán học để thoát ly đến không gian nhiều chiều hơn. Siêu lập phương là một ví dụ.

Vào đầu những năm 1900, kiến trúc sư Claude Bragdon đã phỏng lại khối siêu lập phương trong các tác phẩm 4 chiều của mình. Cũng bị cuốn hút bởi siêu lập phương, Salvador Dalí lại tìm hiểu Toán học để tạo ra mô hình siêu lập phương mở làm điểm nhấn cho bức họa có tên Crucifixion: bức họa Chúa Jesu bị đóng đinh trên cây thập giá hình siêu lập phương mở 4 chiều.

-Trích Sự kì diệu của Toán học-

## ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG BROUWER



Bạn lấy hai tờ giấy xếp lên nhau, chúng tiếp xúc nhau hoàn toàn. Nếu bạn vo tờ giấy ở trên rồi đặt nó lên tờ giấy còn lại, bạn hãy đề "cục giấy" này cho đến khi nó phẳng ra, điều sẽ phải khiến bạn ngạc nhiên đó là: có ít nhất một điểm trên tờ giấy nhàu nát chính là điểm tiếp xúc ban đầu của hai tờ giấy nguyên thủy, ngay chính tại vị trí đó. Bạn có tin được không?

Một ví dụ khác: bạn có một ly cafe, bạn dùng muỗng khuấy nó lên rồi để yên, khi đó sẽ có một vài điểm vẫn ở chính cái nơi mà nó đã nằm tại đó trước khi bạn khuấy, có thể là nó đã

di chuyển hỗn loạn khi bạn khuấy, nhưng sau cùng, nó lại đi về chốn cũ.

Trong cả hai hành động trên, những điểm được miêu tả như thế được gọi là những điểm bất động (fixed point). Chẳng cần đến những thí nghiệm Vật lý để kiểm chứng vì trong Toán học, định lý điểm bất động Brouwer khẳng định điều đó.

Định lý được phát biểu năm 1912 bởi nhà luận lý học Hà Lan Luitzen Egbertus Jan Brouwer và còn có tên là Nguyên lý điểm bất động Brouwer. Đây là một trong những định lý Toán học quan trọng của thế kỉ XX, ngày nay vẫn đang được tiếp tục mở rộng. Chứng minh nguyên thủy của Brouwer sử dụng phương pháp topo (phương pháp bậc của ánh xạ liên tục). Ngày nay đã có ít nhất năm cách chứng minh khác nhau cho nguyên lý nổi tiếng này và hàng chục định lý tương đương với nó đã được tìm ra.

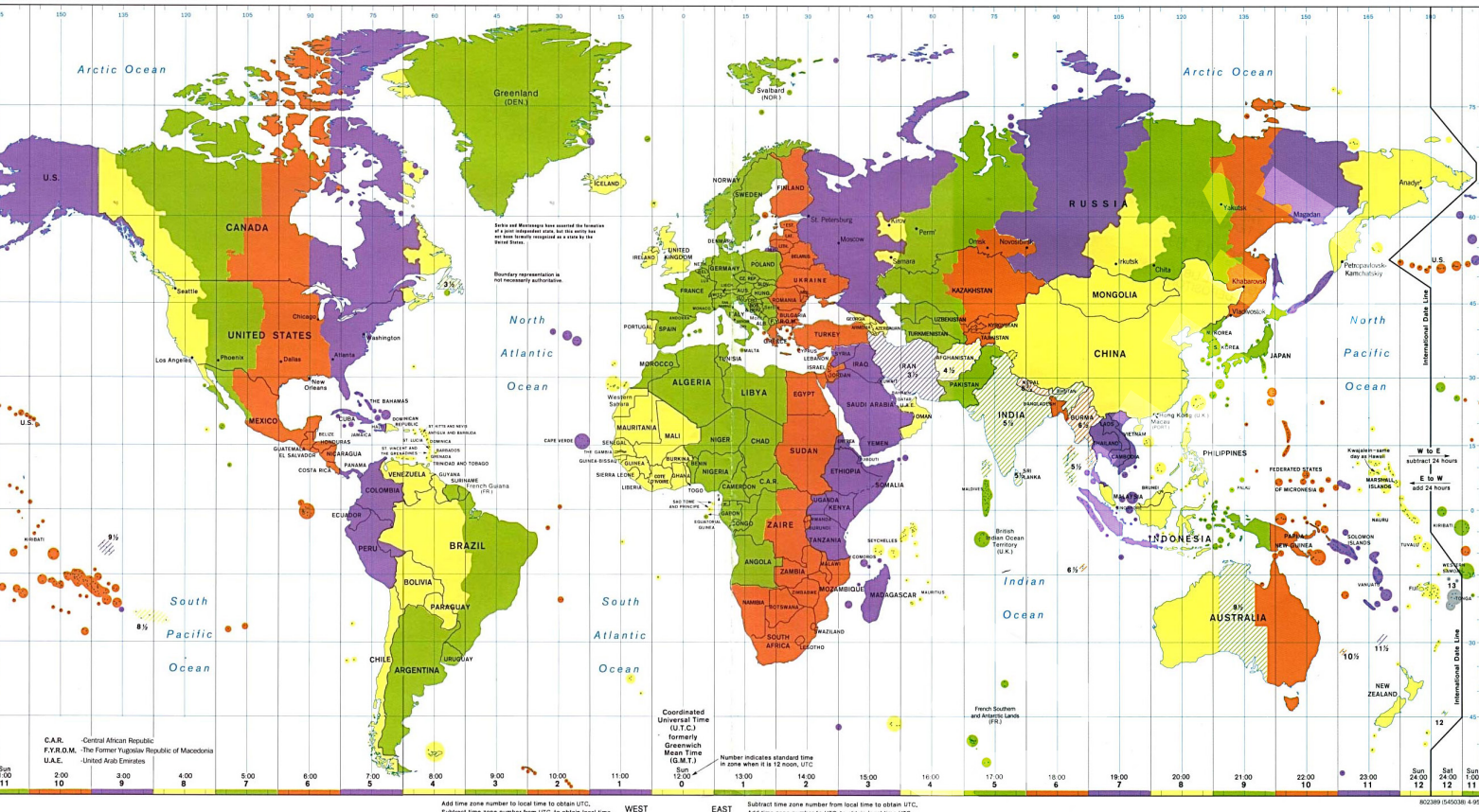


Phát biểu nguyên thủy của định lý như sau:

Một ánh xạ liên tục  $f$  từ hình cầu đóng trong  $\mathbb{R}^n$  vào chính nó phải có điểm bất động, tức là tồn tại  $x$  sao cho  $f(x)=x$ . Chẳng hạn, trong mặt phẳng phức, mọi ánh xạ liên tục của hình tròn đơn vị vào chính nó sẽ có một điểm cố định.

Toán học có lắm điều đau đầu, nhưng không phải là không thể hiểu được. Nếu biết quy về thực tế, trực giác được Toán học thì mọi chuyện sẽ đơn giản hơn.





# TÔ MÀU BẢN ĐỒ

## ĐỊNH LÍ 4 MÀU

**BẠN CÓ BIẾT RẰNG CHỈ CẦN DÙNG 4 MÀU LÀ CÓ THỂ TÔ MÀU CHO MỘT TẤM BẢN ĐỒ THÔNG THƯỜNG KHÔNG?**

Mục đích của việc tô màu bản đồ là để phân biệt các vùng lãnh thổ, sao cho hai vùng lãnh thổ chung biên giới sẽ được tô màu khác nhau. Và quả thật, chỉ cần dùng 4 màu để tô là đủ, dù cho bản đồ đó vẽ một khu vực lớn đến thế nào đi chăng nữa.

Điều thú vị ở chỗ đây là định lý lớn đầu tiên được chứng minh bằng máy vi tính, tức là nó không được lập luận, suy diễn chứng minh bằng Toán học thông thường, bằng cách chúng ta chứng minh Toán học hằng ngày. Không cần phải nói ra, quả thật, cách chứng minh như thế thật không đáng tin, bởi vì chúng ta chẳng thể kiểm chứng trực tiếp được nó. Do vậy, muốn tin vào chứng minh này, thì ta phải công nhận sự chính xác của Ngôn ngữ lập trình và phần cứng máy tính được sử dụng để chạy chương trình chứng minh.

Năm 1976, cuối cùng thì định lý cũng được chứng minh bởi Kenneth Appel và Wolfgang Haken tại trường Đại học Illinois với sự trợ giúp của máy vi tính (trong khoảng 1000 giờ). Nhà khoa học John A. Koch cũng góp phần cải tiến thuật Toán để giải quyết trọn vẹn bài Toán 4 màu.

Điều đáng nói thứ hai nữa là trên thực tế, định lý rất ít khi được áp dụng vào khoa học vẽ bản đồ, bởi vì có những bản đồ sử dụng ít hơn bốn màu. Hơn nữa, hầu hết các bản đồ thực tế không chỉ có các vùng lãnh thổ, chúng còn phải có sông ngòi, đại dương, mà tất cả chúng phải cùng màu. Do vậy làm tăng số lượng màu cần thiết để vẽ các vùng lãnh thổ. Chưa kể đến chuyện có những vùng đất của cùng một quốc gia nhưng bị tách rời nhau, do đó phải vẽ cùng màu và định lý không áp dụng được.

Ngoài ra, các sách vở Địa lý cũng không nhắc đến định lý này. Những người vẽ bản đồ cho rằng họ quan tâm hơn đến việc phối màu bản đồ sao cho đẹp mắt; do vậy việc sử dụng bốn, năm hay nhiều màu hơn không phải là vấn đề đáng bận tâm.

Như vậy, định lý bốn màu chỉ “phát huy sức mạnh” khi bản đồ chỉ bao gồm các vùng lãnh thổ, không có hồ ao, các vùng đất thuộc cùng một lãnh thổ không tách rời nhau, bản đồ phải được vẽ trên mặt phẳng hay mặt cầu.

## LÝ THUYẾT NÚT

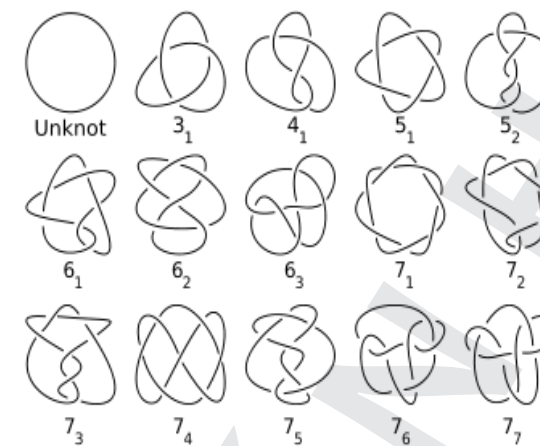
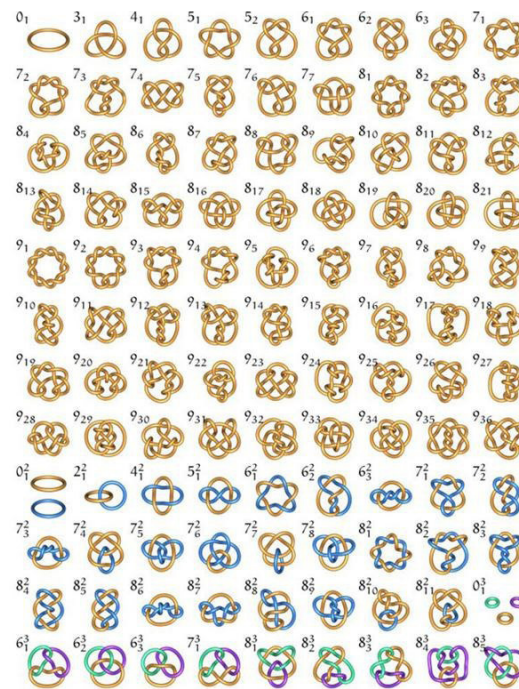
LÝ THUYẾT NÚT LÀ MỘT PHÂN NHÁNH RẤT MỚI TRONG TOÁN HỌC, NÓ LÀ MỘT PHẦN CỦA TOPO, MỘT LĨNH VỰC TOÁN HỌC PHỨC TẠP NHẤT, “KHÓ NUỐT” NHẤT, LÀM ĐAU ĐẦU CÁC SINH VIÊN NGÀNH TOÁN.

Nút ở đây đơn giản là một vòng dây thắt nút. Thoạt nghe, bạn có thể cho rằng nút chẳng có gì đặc biệt ngoài tác dụng cố định, neo giữ đồ vật lại. Thế nhưng mà trong Toán học, tồn tại cả một lĩnh vực phức tạp chỉ để nghiên cứu các nút, gọi là Lý thuyết Nút.

Lý thuyết Nút là một phân nhánh rất mới trong Toán học, nó là một phần của Topo, một lĩnh vực Toán học phức tạp nhất, “khó nuốt” nhất, làm đau đầu các sinh viên ngành Toán.

Lý thuyết Nút bắt đầu từ thế kỉ XIX, với ý tưởng của Lord Kelvin cho rằng các nguyên tử là những cuộn xoáy thắt nút tồn tại trong ete-thứ vốn được tin là chất lỏng vô hình lấp đầy không gian. Ông tin là mình có thể phân loại các nút kiểu như là bảng tuần hoàn các nguyên tố hoá học. Dù rằng ý tưởng gốc của Kelvin không đúng nhưng Lý thuyết Nút vẫn là một chủ đề nóng hổi trong thời đại Khoa học ngày nay, và quả thực, nó đã khiến nhân loại được “mở mắt”, khám phá ra những điều không thể ngờ: những kết quả DNA trong Sinh học, lý thuyết Siêu dây trong Vật lý,...

Một điểm lưu ý là các Nút Toán học khác với các nút thắt thông thường là chúng không có điểm cuối, chúng là một dạng vòng lặp đóng mà không thể “gỡ” ra thành vòng tròn. Những gì mà các nhà Toán học muốn làm là phân loại nút, phân biệt nút.



Một vài kết quả quan trọng đã được tìm ra:

- Một nút không thể tồn tại trong không gian lớn hơn 3 chiều.
- Nút đơn giản nhất là nút 3 lá, với 3 chỗ giao nhau (hình thứ hai).
- Chỉ có duy nhất một nút với 4 chỗ giao (hình thứ ba).
- Chỉ có hai loại nút với 5 chỗ giao (hai hình tiếp).
- Có hơn 12000 nút với số chỗ giao không quá 13 được tìm ra.

### LÝ THUYẾT NÚT TRONG SINH HỌC

Có một vài mối liên hệ giữa lý thuyết nút và sinh học phân tử, vật lý phân tử. Các nhà Khoa học trong lĩnh vực này đã sử dụng các kết quả Toán học và áp dụng các kĩ thuật mới trong lý thuyết nút để nghiên cứu cấu trúc DNA. Họ phát hiện ra rằng các mạch DNA có thể tạo nên vòng lặp mà đôi khi gọi là nút, xác định chuỗi các bước mà mạch DNA có thể đã từng biến đổi để tạo thành cấu trúc cụ thể và dự đoán các cấu trúc không quan sát được của DNA. Tất cả các kết quả cho thấy Toán học về lý thuyết nút thật hữu dụng trong kĩ thuật gen.



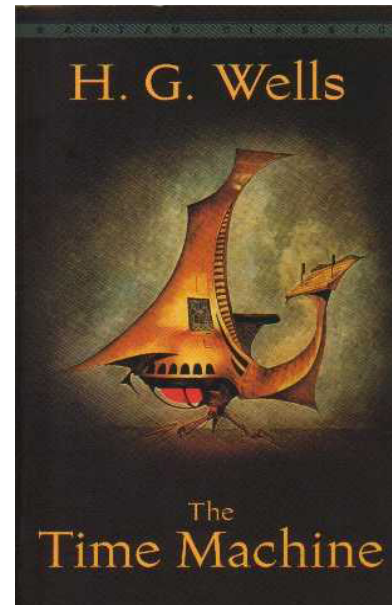


# THE TIME MACHINE

bài viết gốc của Nguyễn Việt Hưng, đã được xin phép biên tập lại.

Vào năm 1895, tiểu thuyết khoa học viễn tưởng “The Time Machine” (Cỗ máy Thời gian) của nhà văn Herbert George Wells, được xuất bản, truyện kể về cuộc phiêu lưu tới một tương lai xa vô cùng, năm 802701, của nhân vật The Time Traveller (Lữ khách xuyên Thời gian).

Ảnh dưới là bìa quyển sách trước và sau khi tái bản.



Đây là đoạn trích nhân vật Lữ khách hùng hồn thuyết giảng với bạn bè để giải thích vì sao anh ta ham mê nghiên cứu chế tạo Cỗ máy Thời gian: “- Xin quý vị chú ý lắng nghe. Tôi sẽ xét lại một hoặc hai quan điểm đã được mọi người thừa nhận. Chẳng hạn môn hình học mà người ta đã dạy cho quý vị ở nhà trường, thật ra đã dựa trên một nền tảng sai lầm. Có phải người ta đã dạy quý vị rằng một đường thẳng toán học là một đường chỉ có chiều dài mà không có chiều rộng, chiều dày? Vậy làm gì có một đường như thế trong thực tế. Cả mặt phẳng toán học nữa cũng làm gì có. Tất cả những khái niệm này đều chỉ là sự trừu tượng hoá mà thôi. Vậy xin hỏi: Liệu có thể có một hình khối chỉ có chiều dài, chiều rộng và chiều cao được không? Liệu có thể có một hình khối chỉ tồn tại trong một khoảnh khắc tức thời được không? Liệu có thể có một hình khối không tồn tại trong bất kỳ khoảnh khắc nào hay không?”

Một đoạn trích khác:

“- Rõ ràng bất kỳ vật thể nào trong thực tế cũng phải có 4 chiều: chiều dài, chiều rộng, chiều cao, và chiều thời gian (duration – sự trôi của thời gian). Nhưng do những hạn chế tự nhiên về mặt tâm lý của con người, điều mà lát nữa tôi sẽ giải thích với quý vị, chúng ta thường không nhận ra điều đó. Thực ra có 4 chiều, trong đó 3 chiều ứng với 3 mặt phẳng không gian, và chiều thứ tư là thời gian. Tuy nhiên, người ta thường có xu hướng phân biệt một cách phi thực tế 3 chiều không gian với chiều thời gian, ấy là vì ý thức của chúng ta di chuyển theo một chiều nhất định dọc theo trục thời gian bắt đầu từ lúc sinh ra đến lúc tử giả cõi đời này.”

Chỉ cần hai đoạn trích như thế trong một quyển sách xuất bản năm 1895, hẳn cũng đã khiến các bạn phải vô cùng sửng sốt.

Như vậy là 21 năm trước khi Einstein công bố Thuyết Tương Đối của mình, ý tưởng về khái niệm “Không-thời gian” đã xuất hiện, trong một quyển truyện Khoa học viễn tưởng của nhà văn Herbert George Wells xuất bản năm 1895, ông đã miêu tả một cách tinh tế, thể hiện chính xác khái niệm một cách không thể ngờ cho dù cho hoàn toàn dựa trên trí tưởng tượng.

Einstein đã từng nói: “Sau khi tôi phát minh ra Thuyết Tương đối Tổng quát, nhiều lần tôi băn khoăn tự hỏi nếu tôi không nghĩ ra thì không biết đến lúc nào loài người mới nghĩ ra?”. Và giờ bạn đã biết rằng đó là một câu nói không đúng.

Nếu Herbert George Wells là một nhà Khoa học thì có thể, có thể thôi, là chúng ta biết đến Einstein bởi một công trình khác chứ không phải Thuyết Tương Đối.

Một điều kì lạ là không một ai nhắc đến cái tên Herbert George Wells vì ý tưởng của ông, và bản thân ông cũng không lên tiếng gì sau khi Einstein công bố Thuyết Tương Đối. Nhưng riêng ad nghĩ ông đã phải rất kinh ngạc.

Cũng không ai biết rằng liệu Einstein đã đọc quyển “The Time Machine” của Herbert George Wells mà từ đó, nhen nhóm ý tưởng về Không-thời gian? Nếu không, thì quả đúng là hai tư tưởng lớn gặp nhau được thể hiện qua Khoa học và Văn học.

Cuộc sống luôn có những sự trùng hợp thú vị.

# DỪNG TOÁN ĐÁNH BẠC

Cơ quan thuế của Australia đã vén bức màn bí ẩn về một câu lạc bộ mang tên Punters’ Club gồm 19 “thần bài” xuất thân là nhà Toán học. Các thiên tài này chuyên rong ruổi khắp các sông bạc trên thế giới và kiếm về gần 2,4 tỉ USD chỉ trong ba năm “hành nghề”.

Hầu hết các thành viên của câu lạc bộ Punters gặp nhau khi còn học tại Trường ĐH Tasmania (Australia). Tại đây họ đã nảy ra ý định kiếm tiền bằng tài năng Toán học. Các “thần bài” cho biết việc tinh thông Toán học cực kỳ hữu dụng khi được dùng trong sông bạc. Tất cả họ đã thành triệu phú nhờ số tiền thắng bạc.

Việc giàu lên bất ngờ của 19 nhà Toán học đã không thể qua mắt cơ quan thuế. Kết quả là câu lạc bộ này đã bị phạt gần 900 triệu USD tiền thuế.



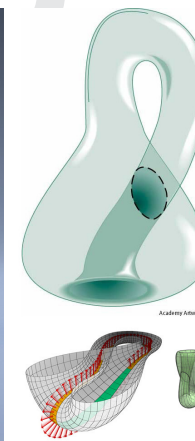
DAVID WALSH, MỘT NHÀ TOÁN HỌC THUỘC CÂU LẠC BỘ CỜ BẠC PUNTERS



trong và bên ngoài. Một khi bạn ở một bên thì đi như thế nào đi chăng nữa cũng không thể qua được bên kia.

Thế nhưng chiếc chai Klein là một bề mặt không có “bên trong” cũng như “bên ngoài”, có chỉ có đúng một bên. Nói cách khác, bạn đi mãi một bên là sẽ đi qua qua được bên kia. Nó như dải Mobius nhưng lại không có cạnh. Nó được tạo thành khi bạn nối hai dải Mobius dọc theo cạnh của chúng. Rắc rối thay, bạn không thể làm được chuyện đó trong không gian 3 chiều, ít nhất bạn cần có 4 chiều để thực hiện việc nối.

Một trong những công việc mà Toán học phải làm đó là phân loại bề mặt, mong muốn hiểu được tất cả các bề mặt 2 chiều có thể có được. Nếu như cách đây khoảng 500 năm, chúng ta còn chưa biết rõ hình dạng nơi chúng ta sống – Trái đất, thì giờ chúng ta đã biết mọi bề mặt 2 chiều khả dĩ.



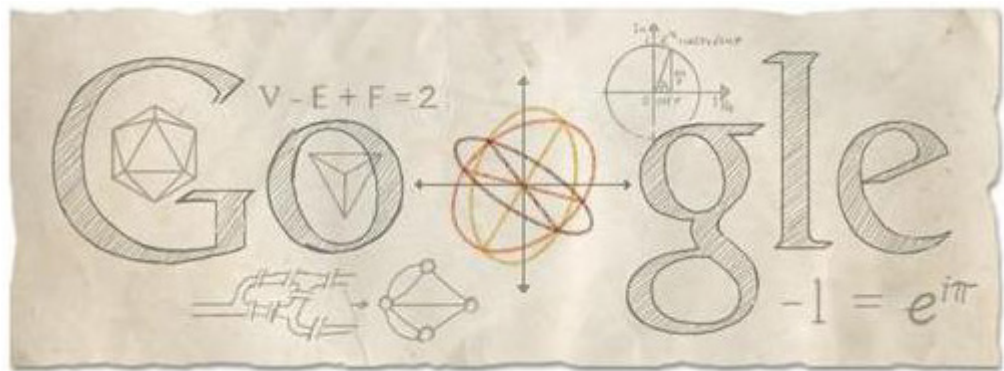
## CHAI KLEIN

Một bề mặt là vật thể 2 chiều, và mỗi một phần đủ nhỏ của nó có thể được coi như là một mặt phẳng. Chẳng hạn, chúng ta sống trên một mặt cầu nhưng chúng ta qua nhỏ bé nên cảm tưởng như mình đang sống trên một mặt phẳng.

Mặt cầu và mặt xuyên (mặt hình chiếc phao bơi) là những ví dụ về bề mặt, chúng có hai bên (hay phía) mà ta gọi là bên



# LEONHARD EULER VÀ LOGO CỦA GOOGLE



Tính đến hôm nay là 306 năm ngày sinh của Leonhard Euler (15/4/1707 – 18/9/1783). Đó cũng chính là lí do ngày hôm nay Google đã thay đổi logo kỉ niệm ngày sinh của ông.

Hẳn các bạn sẽ phải thắc mắc các hình vẽ, công thức trên logo có ý nghĩa như thế nào?

Ad xin có một bài viết giải đáp như sau:

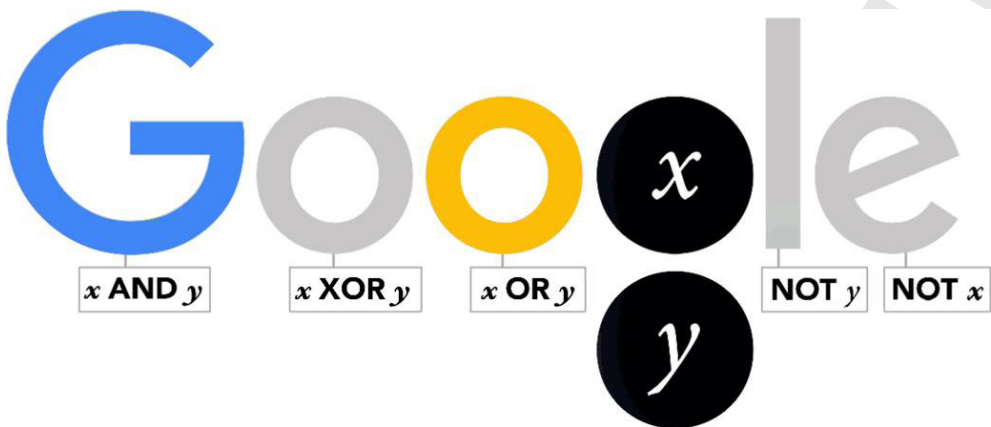
Thứ nhất, vị trí chữ “G” và “O” có hai hình miêu tả hai khối đa diện đều: khối tứ diện đều và khối hai mươi mặt đều cùng với công thức  $V-E+F=2$ . Đó chính là công thức Euler, ở đó liên hệ giữa các cạnh (E), đỉnh (V) và mặt (F) của một đa diện. Trong không gian ba chiều, có đúng 5 khối đa diện đều lồi (tứ diện đều, khối lập phương, khối tám mặt đều, khối mười hai mặt đều, khối hai mươi mặt đều), chúng là các khối đa diện duy nhất, công thức Euler chứng minh được điều đó.

Thứ hai, ở ngay phía dưới là hình ảnh mô tả bài Toán “7 chiếc cầu Königsberg”, bài Toán này đã được Euler giải quyết năm 1736, nói đúng hơn, ông chứng minh bài toán không có đáp số. Kết quả được công bố trên bài báo nhan đề “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”, và đó chính là ứng dụng sớm nhất của lý thuyết đồ thị hay của topo học.

Thứ ba, chữ “O” kế tiếp được thay thế bởi một ảnh động: một hệ trục tọa độ Oxy quen thuộc cùng những đường tròn bằng nhau có tâm ở gốc tọa độ. Leonhard Euler cũng đã từng viết về hình học giải tích, một mảng trong lĩnh vực Toán học trở nên cực kì quan trọng trong thế kỷ XX.

Cuối cùng, đẳng thức  $-1=e^{i\pi}$  (tổng quát:  $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ ) diễn tả số -1 được biểu diễn theo công thức tổng quát Euler diễn tả mối quan hệ giữa hàm số lượng giác và số phức. Đó là một trong những công thức được sử dụng rộng rãi nhất trong lĩnh vực Toán học. Phía trên là hình ảnh mặt phẳng phức cùng đường tròn được kèm theo trong phần chứng minh công thức này.

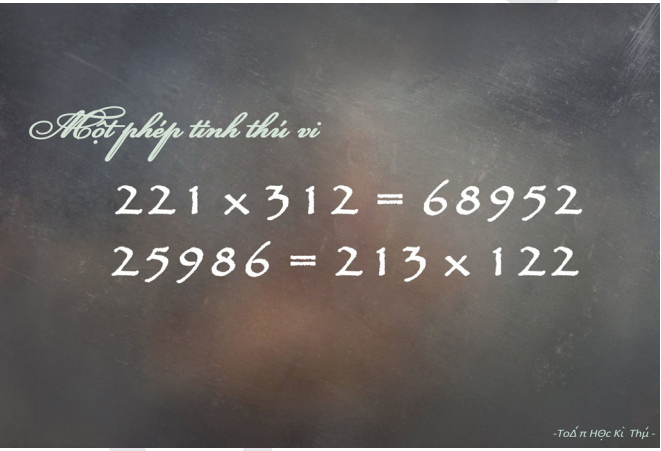
# GEORGE BOOLE VÀ LOGO CỦA GOOGLE



Ngày 2 tháng 11 năm 2015, nhân kỉ niệm 200 năm ngày sinh của nhà Toán học George Boole, người nổi tiếng với thuyết logic Boolean, là nền móng của các ngôn ngữ lập trình ngày nay, Google đã đổi một doodle mới tưởng nhớ đến những cống hiến lớn lao của ông.

Năm 1864, George Boole qua đời khi mới ở tuổi 49 vì bệnh viêm phổi, sau khi ông đi bộ hơn 3 cây số dưới trời mưa rét và tiếp tục giảng dạy trong khi quần áo vẫn thấm ướt nước mưa.

# MỘT PHÉP TÍNH THÚ VỊ



69!

Trong Toán học, với số tự nhiên n thì n giai thừa được định nghĩa là tích từ 1 đến n, kí hiệu n!

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$   
riêng 0! được coi là 1.

Và bạn có biết?  
69! là giai thừa lớn nhất mà các máy tính bỏ túi thông dụng hiện nay tính được.





## HIỆU ỨNG CÁNH BƯỚM

### ĐIỂM BẤT ĐỘNG

NƠI AN TOÀN NHẤT TRONG CƠN BÃO LẠI CHÍNH LÀ NƠI XUẤT PHÁT CỦA NÓ - TÂM BÃO.

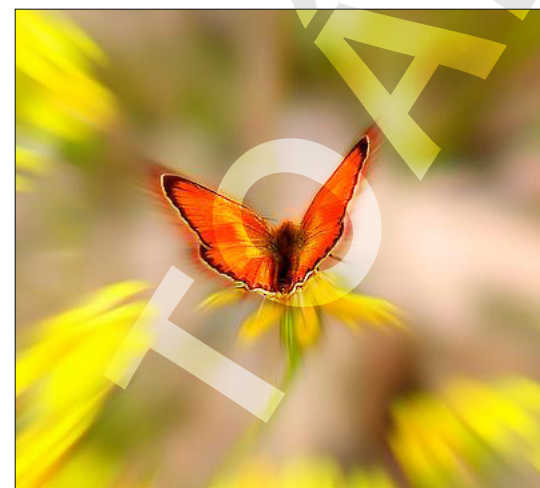
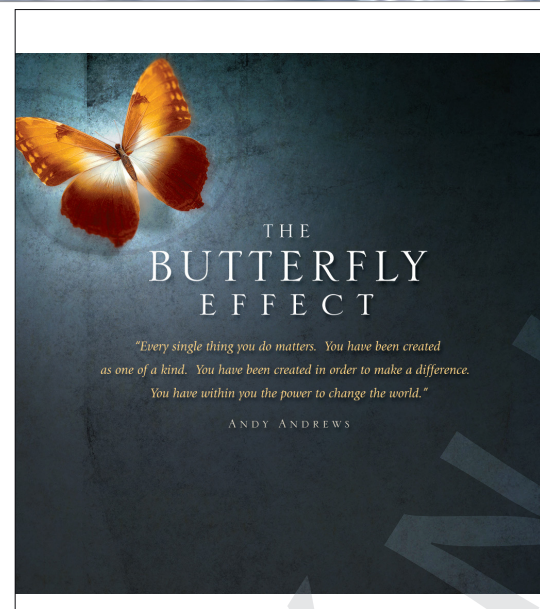
**Đ**ài phong là điểm mắt bão trên biển nhiệt đới. Thực tế nó là điểm nằm giữa vòng xoắn không khí.

Chúng ta thường nghe bản tin thời tiết đại loại như sau: sức gió ở vùng trung tâm bão cấp 12, tức là mỗi giây gió đi qua khoảng 33m, gấp 4 lần tốc độ tàu hỏa bình thường. Sức gió khủng khiếp như thế chỉ ảnh hưởng khu vực đường kính khoảng 10Km. Do tốc độ không khí di chuyển ở vòng ngoài rất mạnh nên không thể vào trung tâm được. Do đó không khí ở đài phong gần như không chuyển động (không có gió).

Hiện tượng có một điểm bất động trong tự nhiên có thể xuất hiện ở bất cứ đâu. Chẳng hạn một nhóm người đứng xung quanh một cái chuông. Khi đó, nếu chuông được gõ thì có người ù tai, có người không. Sở dĩ như vậy là vì tồn tại những điểm bất động không chịu tác động của âm thanh.

Một hiện tượng khác nữa là nếu ta lấy hai tấm ảnh như nhau nhưng khác kích thước thì khi đặt tấm ảnh nhỏ lên tấm ảnh lớn, chúng sẽ luôn có một điểm chung, tức là một điểm thuộc tấm ảnh nhỏ sẽ nằm đè lên chính điểm đó ở bức ảnh lớn.

Việc nghiên cứu điểm bất động được bắt đầu từ đầu thế kỉ XX, nó có nhiều ứng dụng trong lí thuyết phương trình vi phân, tích phân, lí thuyết cực trị,...



**V**ào thập kỷ 1960, “một trong những dự án tham vọng nhất là việc lập ra một mô hình toán học nhằm dự báo thời tiết do nhà Toán học và khí tượng học Edward Lorenz phụ trách.

Năm 1961, Lorenz vô tình nhập các dữ liệu đã được máy tính làm tròn để tiết kiệm thời gian thí nghiệm. Chẳng hạn, các con số như 0,506127 được Lorenz nhập vào máy là 0,506. Ông hoàn toàn bất ngờ khi máy tính đưa ra một dự báo hoàn toàn khác xa so với dữ liệu gốc, dù giá trị làm tròn hoàn toàn không đáng kể. Từ đó, Lorenz kết luận rằng, việc cố gắng dự báo thời tiết nhiều hơn 1 tuần là hoàn toàn vô nghĩa do độ nhạy cảm của hệ thống thời tiết với những điều kiện ban đầu. Năm 1969, ông công bố phát hiện này của mình.

“Hiệu ứng cánh bướm” đã trở thành một dấu mốc trong việc phát triển “lý thuyết hỗn loạn” (Chaos theory). Đây là một lý thuyết nghiên cứu các hệ thống vận động cực kỳ nhạy cảm với những điều kiện ban đầu.

“Một cái vỗ cánh của một con bướm ở một nơi nào đó trên trái đất có thể dẫn tới một cơn bão ở một nơi nào khác trên thế giới một năm sau đó.”

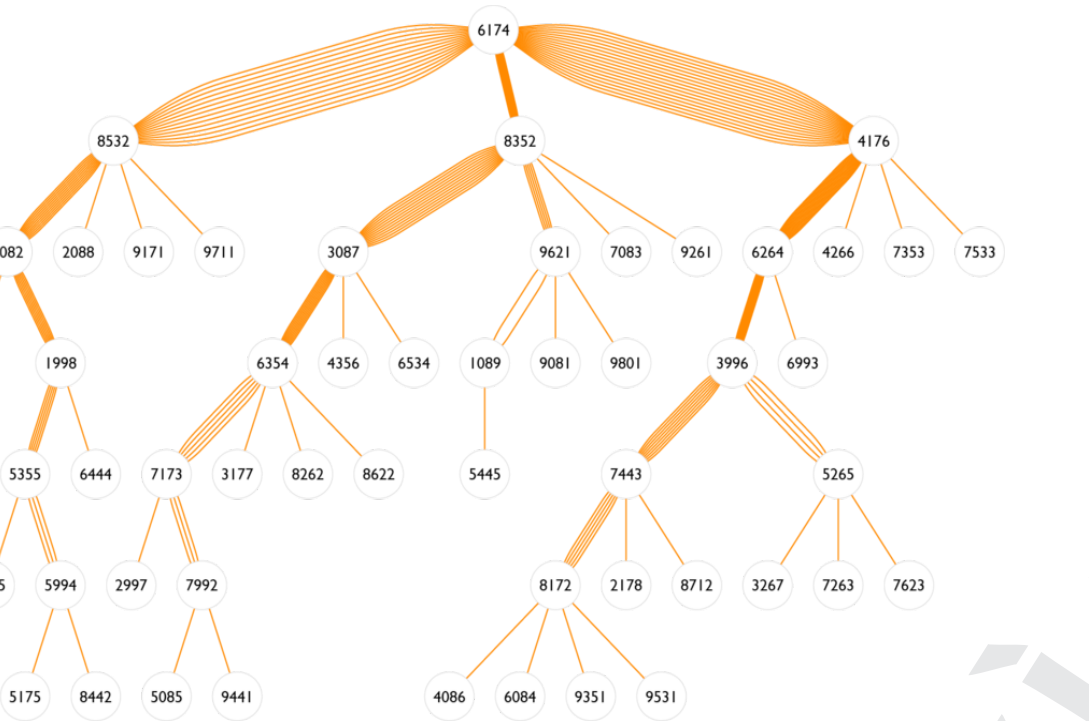
Với hiệu ứng đó, hiện nay người ta buộc phải chấp nhận rằng việc dự báo thời tiết chỉ đạt được mức độ chính xác tương đối và ngắn hạn. Dù cho được trang bị những computer thông minh bậc nhất, khoa học dự báo thời tiết vẫn luôn luôn không tốt gì hơn những phỏng đoán.

Tình trạng hỗn độn, phi trật tự hoá ra là bản chất cốt lõi của Vũ Trụ. Dường như Chúa trời đã sắp đặt sẵn mọi thứ. Con người nhỏ bé đừng bao giờ kiêu ngạo với những thành quả của mình.

Nói một cách khác, hiệu ứng cánh bướm muốn nói lên hiện tượng “sai một li, đi một dặm” trong cuộc sống. Mặc dù chúng ta ai cũng biết là như thế, nhưng sự thể hiện của nó trong tự nhiên, trong Toán học thì quả là không thể ngờ được.

Lý thuyết này cũng được ứng dụng rộng rãi trong các ngành khoa học khác như địa chất, cơ khí, sinh thái học, kinh tế học và cả tâm lý học.





## HÀNG SỐ KAPREKAR

Cuộc sống của chúng ta được như ngày hôm nay là do sự phát triển của Toán học, và sự tìm tòi, phát hiện ra những hằng số đóng góp một phần vào sự phát triển đó.

Các con số, tuy nó thể hiện rất đơn giản, nhưng việc chứng minh, khám phá lại là phức tạp nhất trong Toán học. Không biết bao nhiêu là bài toán hay và khó ra đời, có khi thách thức cả nhân loại hàng thế kỉ (chẳng hạn định lí Fermat lớn). Đối với các nhà Toán học, các con số luôn là đề tài hấp dẫn.

Xin giới thiệu với các bạn số 6174, hằng số Kapreka.

Lấy một số có 4 chữ số khác nhau và làm theo các bước sau

- Sắp xếp lại các chữ số để có số bốn chữ số bé nhất và lớn nhất.
- Lấy số lớn trừ số nhỏ.
- Lấy kết quả đạt được và làm lại quá trình trên.

Điều gì sẽ xảy ra? Chẳng hạn với số 1831

- Bước 1:  $8731 - 1378 = 7353$

- Bước 2:  $7533 - 3357 = 4176$

- Bước 3:  $7641 - 1467 = 6174$

- Bước 4:  $7641 - 1467 = 6174$

.....

và cứ tiếp tục quá trình này. Mọi số có 4 chữ số thỏa mãn điều kiện ban đầu sẽ đi đến kết quả 6174 trong nhiều nhất là 7 bước (như trong hình) và sẽ dừng lại ở đó. Đó là hằng số Kaprekar: 6174.

Chính vì điều đặc biệt này mà người ta gọi số 6174 là hằng số (không đổi) và gắn với tên của người tìm ra nó là Kaprekar. Kaprekar là tên của một nhà toán học nghiệp dư người Ấn Độ đã phát hiện ra hằng số này vào năm 1946.

Quy luật này không chỉ dành cho các số 4 chữ số, mà còn có các “hằng Kaprekar” khác dành cho các số có 3, 5, 6,... chữ số. Bạn thử tìm các hằng số này nhé!

$$5200 - 0025 = 5175$$

$$7551 - 1557 = 5994$$

$$9954 - 4599 = 5355$$

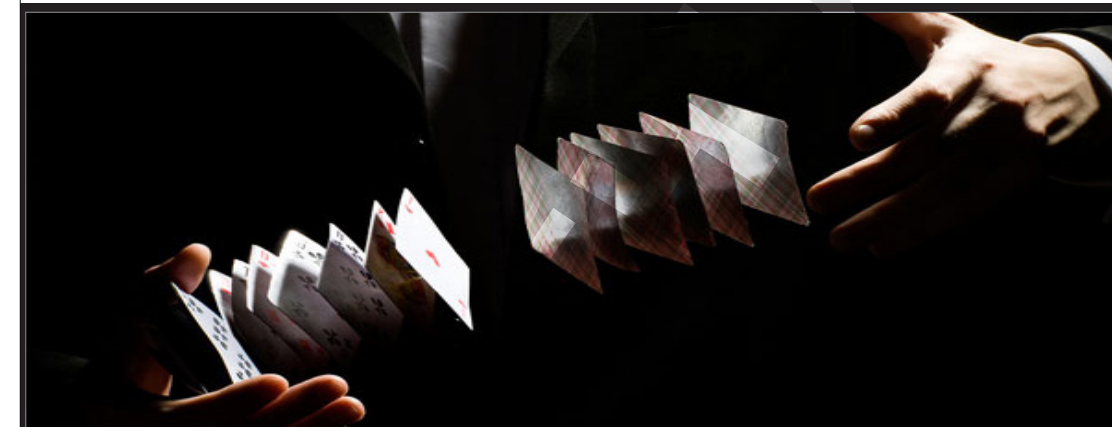
$$5553 - 3555 = 1998$$

$$9981 - 1899 = 8082$$

$$8820 - 0288 = 8532$$

$$8532 - 2358 = 6174$$

$$7641 - 1467 = 6174$$



## ẢO THUẬT TOÁN HỌC VỚI NHỮNG LÁ BÀI

Tôi đặt một bộ bài vào túi áo của mình, bạn hãy chọn ngẫu nhiên một số trong khoảng từ 1 đến 15. Sau đó, tôi cho tay vào túi áo, lấy ra những lá bài mà tổng các số trên mỗi lá bài đúng bằng con số mà bạn đã chọn.

Tôi đã làm như thế nào?

Rất đơn giản, điểm lí thú ở đây là với bốn số 1, 2, 4, 8 thì mỗi số trong khoảng từ 1 đến 15 đều có thể được biểu diễn qua tổng của một tổ hợp các số này.

Điều này cực kì đơn giản nhưng không hề dễ để phát hiện ra chút nào phải không?

Do đó, tôi đã thực hiện “mánh khéo” như sau:

Đặt 4 lá bài Ách, 2, 4, 8 lên đầu hoặc cuối bộ bài (để dễ lấy ra), cho bộ bài vào túi áo. Khi khán giả chọn ngẫu nhiên một số trong khoảng 1 đến 15, chỉ cần tính Toán đơn giản, tôi cho tay vào túi áo lấy ra những lá bài cần thiết.

Khán giả sẽ chẳng biết được là tôi không bao giờ dùng đến những lá bài khác.



# TESSERACT

Trước hết, bạn cần biết thuật ngữ “cube”, cube ở đây là một “khối” đặc-lồi-kín-đối xứng tâm mà nhìn đâu cũng chỉ thấy vuông góc và song song: mặt song song với mặt, cạnh song song với cạnh, mặt vuông góc với mặt, cạnh vuông góc với cạnh.

Trong không gian 0 chiều, cube là một điểm: 1 đỉnh.

1 chiều, cube là một đoạn thẳng: nó có 2 đỉnh là 2 đầu biên, chứa cube 0-chiều là các điểm trên đoạn thẳng.

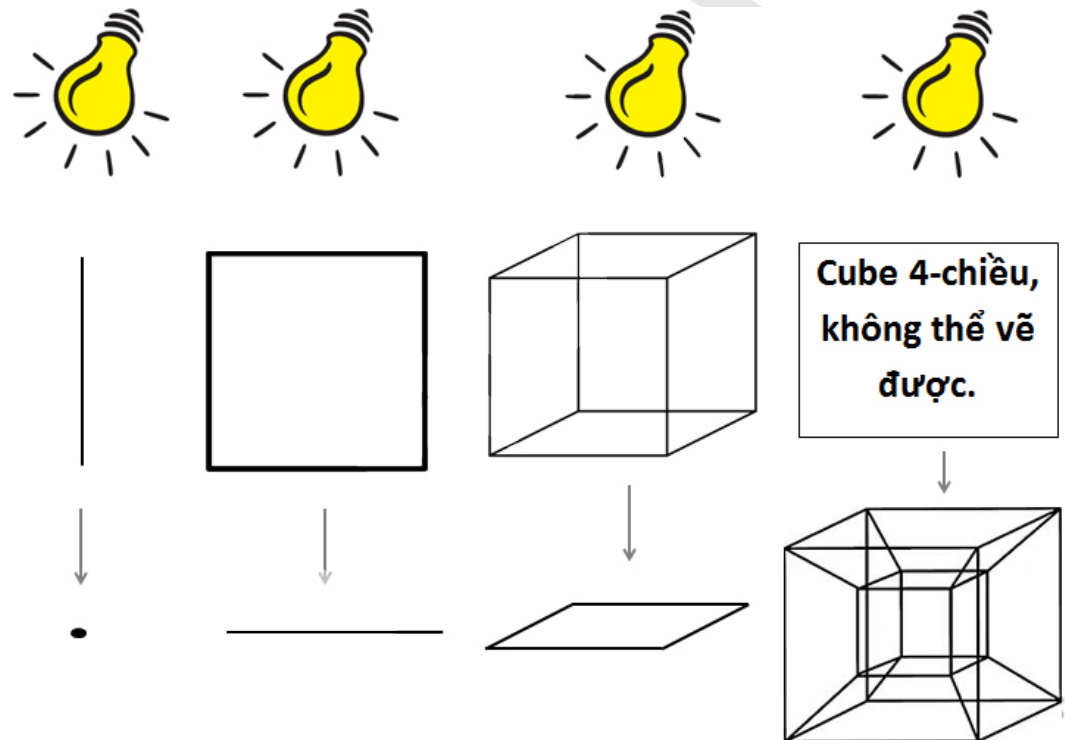
2 chiều, cube là một hình vuông: 4 đỉnh, chứa cube 1-chiều chính là các cạnh của hình vuông.

3 chiều, cube là một khối lập phương: 8 đỉnh, chứa cube 2-chiều chính là các mặt của khối lập phương.

4 chiều, cube được gọi là tesseract hay siêu lập phương: nó có 16 đỉnh và chứa các cube 3-chiều hay khối lập phương.

Hiển nhiên là cả bạn và tôi không thể nào tưởng tượng chính xác được tesseract, bởi vì chúng ta chỉ là những sinh vật 3-chiều, bộ não của chúng ta bị giới hạn chỉ trong không gian này. Mặc dù thế, chúng ta vẫn nhìn ra được hình chiếu (hay bóng) tesseract vào không gian 3 chiều.

Bài viết này sẽ giúp bạn phần nào tưởng tượng được nó.



Hãy quan sát trên hình, hình chiếu (hay bóng) bạn có thể hiểu theo đúng nghĩa đen của nó và ở đây chúng ta sẽ nói đến hình chiếu vuông góc, tức là bóng của một vật thể với nguồn sáng ở ngay trên đỉnh đầu.

Một lưu ý rất quan trọng là hình chiếu của một vật sẽ đi vào không gian có số chiều nhỏ hơn số chiều của không gian mà vật thể tồn tại là 1. Chẳng hạn, bạn ở trong không gian 3 chiều, cái bóng của bạn là một hình phẳng (2 chiều).

Với đoạn thẳng, cube 1-chiều, hình chiếu của nó chỉ là một điểm.  
Với hình vuông, cube 2-chiều, hình chiếu của nó là đoạn thẳng.  
Với khối lập phương, cube 3-chiều, hình chiếu của nó là hình vuông.  
Với cube 4-chiều, hình chiếu của nó được thể hiện trên ảnh.

Thế nhưng, bạn mới chỉ nhìn được một khía cạnh của cái hình chiếu này, khi di chuyển bóng đèn để chiếu theo những hướng khác thì cái bóng sẽ thay đổi hình dạng, nó thay đổi như thế nào thì các bạn xem video mô phỏng tại đây:

<http://www.youtube.com/watch?v=t-WyreE9Zkl>

# TOÁN HỌC KHÁM PHÁ HAY PHÁT MINH?

Theo các bạn, Toán học được phát minh hay là được khám phá ra?

Đây là câu hỏi mang tính tư tưởng, Triết học, thậm chí có thể là cả về mặt tâm linh, tôn giáo khi nó mới xuất hiện.

Trả lời câu hỏi này không dễ. Nó đã phải trải qua rất nhiều giai đoạn thời gian, qua nhiều nhà Toán học. Nhưng cuối cùng, cũng phải có câu trả lời, và nó không phức tạp như chúng ta nghĩ ban đầu.

Nếu câu trả lời chỉ là phát minh, sáng tạo thì Toán học không còn gì để giải quyết, vì tất cả là từ bộ não con người, ta có thể nghĩ gì tùy ý. Như thế, chúng ta là Chúa trời.

Nếu câu trả lời chỉ là khám phá thì nguồn gốc Toán học là từ đâu? Số nguyên tố hoàn toàn là định nghĩa do con người tạo nên. Quy luật, hiện tượng tự nhiên nào cho ta “thấy” số nguyên tố?

Cả hai. Đó mới chính là câu trả lời.

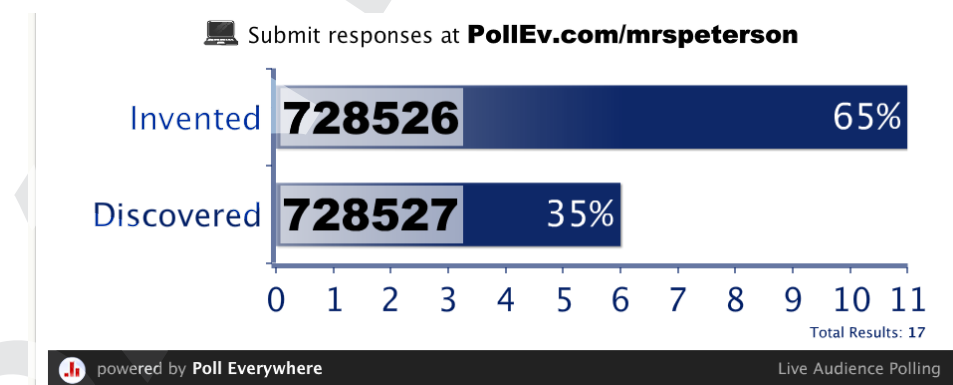
Chẳng hạn, các khái niệm số nguyên tố, điểm, đường thẳng, mặt phẳng,... là do chúng ta phát minh, nghĩ ra. Tức là tất cả các khái niệm ban đầu là do quy ước, sắp đặt của con người.

Các định lý, bổ đề, hệ quả là các khám phá. Không ai tự nghĩ ra, phát minh ra định lý Pythagore cả, không một ai. Đó là tự nhiên, là quy luật được tạo thành từ những khái niệm, định nghĩa mà con người sáng tạo.

Thậm chí chúng ta có thể định nghĩa “số nguyên tố là số chia hết cho 1, 2 và chính nó nữa”. Để rồi từ đó chúng ta khám phá ra những định lý khác về bản thân nó.

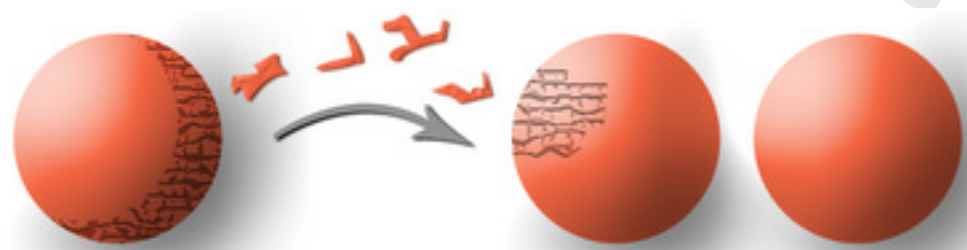
Một cuộc khảo sát cho thấy đa phần chúng ta nghĩ Toán học là được phát minh.

<http://www.epsilon-delta.org/2012/10/is-mathematics-invented-or-discovered.html>



## TIỀN ĐỀ CHỌN

TIỀN ĐỀ CHỌN LUÔN LÀ THỨ MA QUÁI KHIẾN CHO NHỮNG NGƯỜI MỚI BIẾT VỀ NÓ KHÔNG TÀI NÀO MÀ HIỂU ĐƯỢC.



Tiền đề chọn là tiên đề khẳng định rằng với mỗi họ tập hợp tùy ý không rỗng và đôi một không giao nhau, luôn tồn tại một tập hợp mà mỗi phần tử của nó là phần tử của một tập hợp trong họ tập hợp kia và phần tử đó là duy nhất.

Tiền đề này được nhà toán học người Đức Ernst Zermelo phát biểu năm 1904 nên còn được gọi là tiên đề Zermelo.

Nghe ra thật khó hiểu, bạn có thể tiếp cận với nó bằng cách khác như sau:

Tôi có vô hạn những cái túi mà mỗi túi lại đựng vô hạn những cái kẹo. Bạn thì có một cái túi vô hạn, nhưng rỗng, không có gì cả. Bạn lấy trong mỗi túi kẹo của tôi một và chỉ một chiếc kẹo thôi. Cuối cùng cái túi rỗng của bạn có vô số kẹo. Đó là nội dung của một tiên đề rất quan trọng của Toán học mang tên tiên đề chọn.

Tiền đề này sinh ra lắm điều kì quái, chẳng hạn 1 kg gạo có thể nuôi sống cả nhân loại, phù phép một quả cầu thành hai quả cầu y hệt nó,... các lập luận chỉ mang tính lý thuyết.

Cái khiến cho mọi điều kì quái chính là Vô hạn. Những gì liên quan đến nó đều khiến cho chúng ta cảm thấy khó chấp nhận, phản trực giác. Tuy nhiên, mọi thứ đều đúng vẫn là chân lý. Như bài Toán Hai người nông dân và con chim phá hoại, Bài Toán con kiến trên sợi dây thun trước đây trên page, các bạn có thể tìm đọc lại.

Chính vì kì quái, các nhà Toán học đã quy ước: Ai dùng tiên đề chọn thì cứ dùng, nhưng khi dùng phải báo cho mọi người biết.

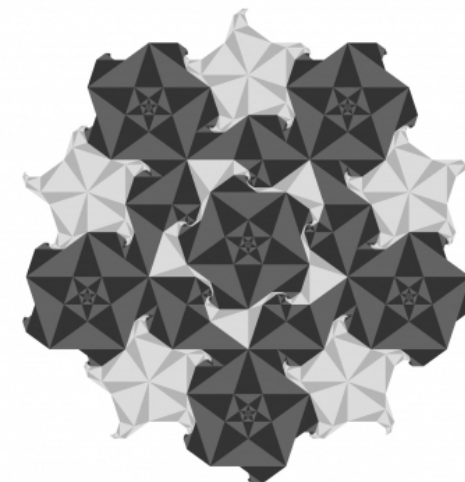
Đọc xong bài viết này, các bạn đừng cảm thấy nó khó hiểu và ma quái, chẳng qua chúng ta không tiếp cận nhiều đến Vô hạn trong cuộc sống. Bất cứ điều gì trong Toán học đã được lý thuyết hiện nay, không có gì là quá tầm với con người cả. Đừng để tâm lý khiến bạn ác cảm Toán học, vì nếu không, bạn đã thực sự thiệt thòi trong cuộc sống này.

## LÁT MẶT PHẪNG

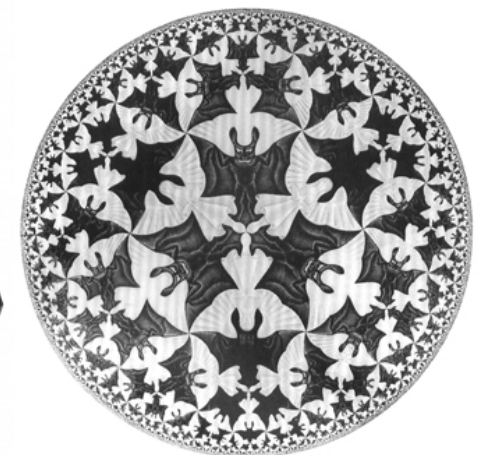
Lát mặt phẳng là dùng những hình phẳng phủ kín một mặt phẳng, một bề mặt. Chẳng hạn như lát gạch, bạn dùng những miếng gạch bông hình vuông phủ kín sàn nhà.

Nghệ thuật lát mặt phẳng đã trải qua nhiều thế kỉ, với nhiều nền văn hoá khác nhau: từ các đồ khảm thời La Mã, Hy Lạp cổ đại, các mẫu hoạ tiết của các nhà nghệ thuật Hồi giáo, phép biến hình lạ thường của M.C. Escher cho đến sự đơn giản của lát mặt phẳng Penrose,...

Ngoài đơn giản nhất là hình vuông ra, những hình có thể lát mặt phẳng được tìm ra bằng các phép biến đổi Hình học.



**Lát mặt phẳng Penrose**



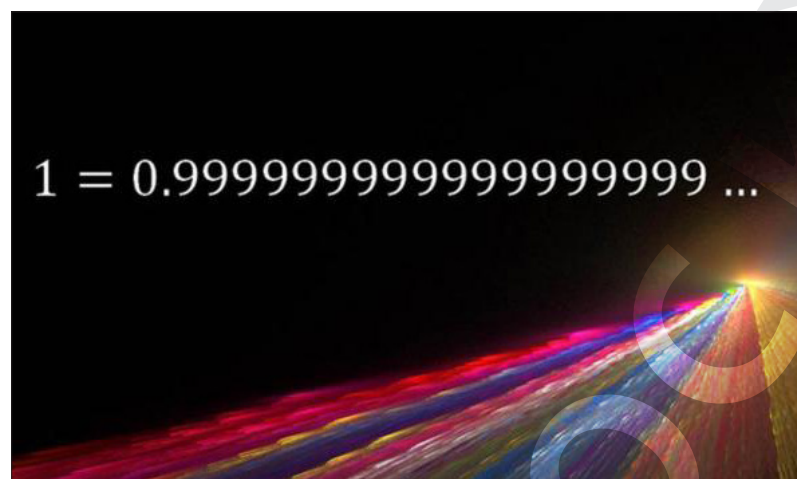
**Một bức hoạ của Escher**

- ΤοΔπ Ηθς Κι Θμύ -



# 0,9999999999999999.....=1

ĐÂY LÀ MỘT SỐ THẬP PHẦN VÔ HẠN TUẦN HOÀN CHU KÌ 9, PHẦN THẬP PHẦN CỦA NÓ LÀ MỘT DÃY VÔ HẠN CON SỐ 9.  
ĐỂ CHO GỌN, TÔI VIẾT NÓ LÀ 0,(9).



Cụ thể hơn, tôi sẽ chứng minh như sau:  
Đặt  $x = 0,(9)$   
Ta có:  $10x = 9,(9)$   
Lấy  $10x - x$  thì  $10x - x = 9,(9) - 0,(9)$   
Điều này có nghĩa là  $9x = 9$  hay  $x = 1$   
Vậy  $0,(9) = 1$

Thật thú vị phải không các bạn?

Thêm một lập luận đơn giản nữa  
Ta biết là  $1/3 = 0,333... = 0,(3)$   
Suy ra  $3 \times 1/3 = 3 \times 0,333... \text{ hay } 1 = 0,999... = 0,(9)$

Lập luận chặt chẽ nhất: 0,(9) là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu 0,9, công bội 1/10, từ đó tính tổng của nó, ta có điều phải chứng minh. Trình độ học sinh lớp 11 giải quyết được một cách đơn giản.

Bạn sẽ không thể ngờ rằng nó chính là số 1. Không phải vì làm tròn đâu. Tôi không làm tròn nó, bạn không làm tròn nó, bản chất nó là như vậy đấy. Thật là lạ!

Như chúng ta đã biết, với hai số khác nhau thì ta luôn tìm được một số khác nằm giữa hai số đó. Từ đó, chỉ cần để ý đơn giản rằng thật không thể nào tìm được một số nào khác nằm giữa 0,(9) và 1.



## SỐ 7

SỐ 7 ĐƯỢC XEM LÀ CON SỐ MAY MẮN, HƠN CẢ SỐ 12

### TOÁN HỌC

7 là số nguyên tố, nghĩa là nó chỉ chia hết cho 1 và chính nó.  
 $1/7 = 0,(142857)$  (tận cùng là 7 sau mỗi chu kì)  
Ta nhận thấy rằng:  
 $142857 \times 1 = 142857$ .  
 $142857 \times 2 = 285714$ .  
 $142857 \times 3 = 428571$ .  
 $142857 \times 4 = 571428$ .  
 $142857 \times 5 = 714285$ .  
 $142857 \times 6 = 857142$ .  
Tất cả đều là hoán vị của các số 1, 4, 2, 8, 5, 7.  
Đặc biệt  $142857 \times 7 = 999999$ .

### 7 bài toán thiên niên kỉ

Ngày 24/5/2000, Viện Toán học Clay công bố danh sách 7 bài Toán chưa giải được với giải thưởng cho việc giải được mỗi bài là 1 000 000 USD Mỹ:  
1. Giả thuyết Poincaré  
2. Bài toán P=NP  
3. Giả thuyết Hodge  
4. Phương trình Navier-Stokes  
5. Giả thuyết Riemann  
6. Giả thuyết Birch và Swinnerton-Dyer  
7. Lý thuyết Yang-Mill  
Trong đó, giả thuyết Poincaré đã được chứng minh vào năm 2006 bởi nhà Toán học Perelman.

### HOÁ HỌC

Trong nguyên tử các electron sắp xếp thành 7 lớp. Số obitan của phân lớp f lớn nhất: 7 obitan.  
Trong bảng tuần hoàn các nguyên tố hóa học có 7 chu kì.  
Các nguyên tử halogen (flo, clo, brom, iot, atalin) có 7 electron lớp ngoài cùng trong nguyên tử.  
7 là số hiệu nguyên tử của nguyên tố Nitơ (N). Do đó nguyên tử Nitơ có 7 electron và 7 proton. Trong không khí, thể tích khí Nitơ chiếm 78%, lớn nhất trong tất cả các khí.  
Trong thang độ pH, nước trung tính có pH= 7.

### VẬT LÍ

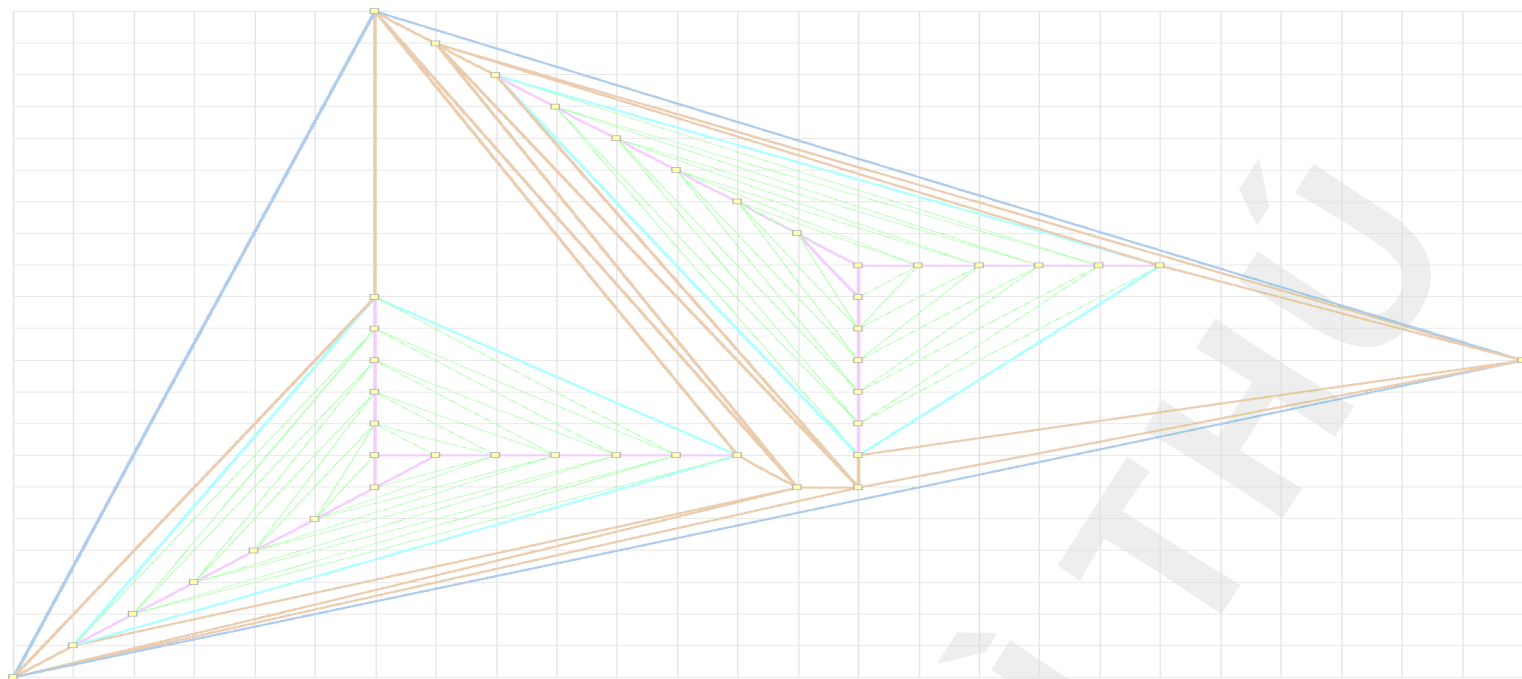
Cầu vồng gồm 7 màu.  
Hệ đo lường quốc tế (viết tắt SI, tiếng Pháp: Système International d'unités) là hệ đo lường được sử dụng rộng rãi nhất. Trong hệ này, có 7 đơn vị cơ bản trong hệ SI.

### TÔN GIÁO

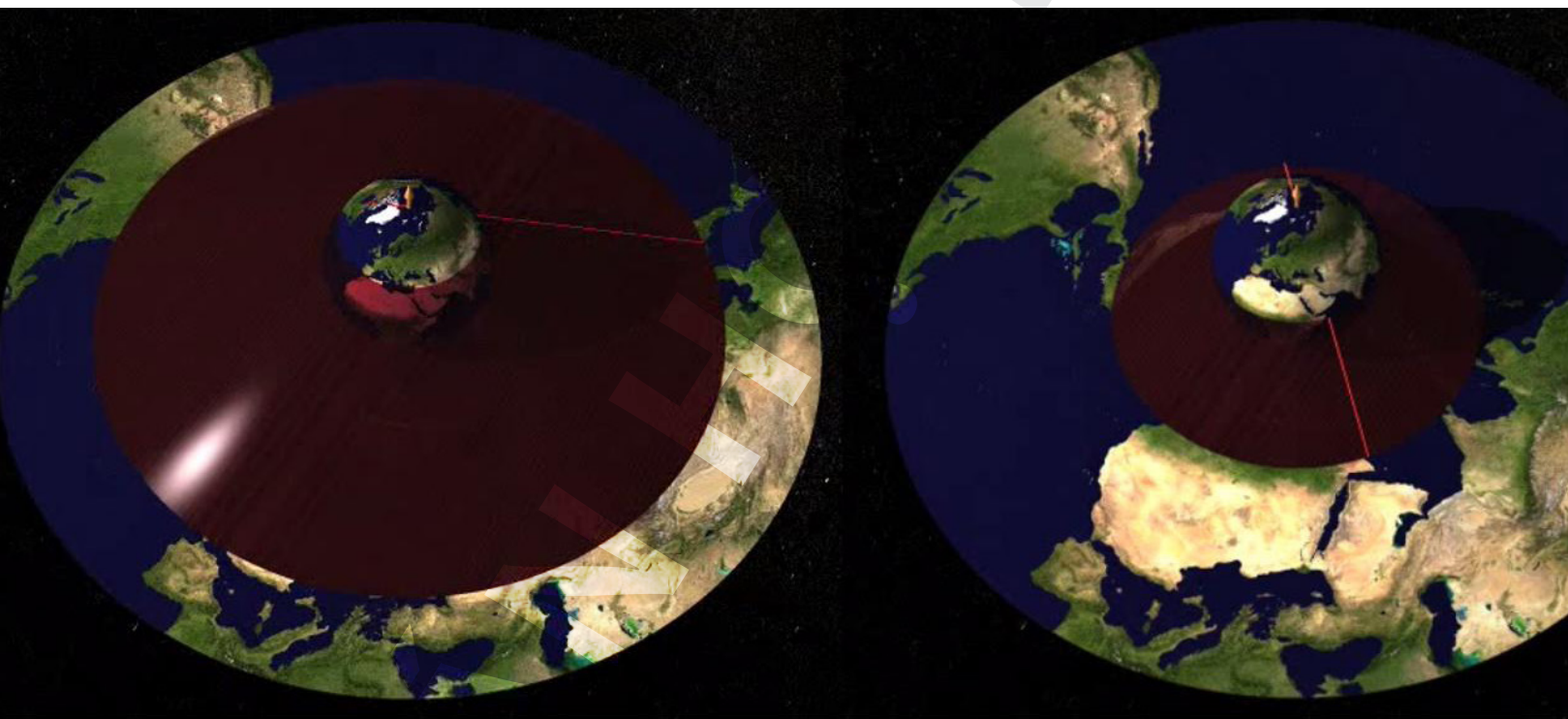
Trong Phật Giáo, khi sinh ra, Đức Phật bước 7 bước, nở ra 7 đóa sen. Lúc chết, con người phải xuống 7 tầng địa ngục và để cúng cho họ, người ta lấy bội số của số 7 = 49 ngày.  
Trong Thiên Chúa Giáo, Đức Chúa Trời đã mất 7 ngày để sáng tạo nên vũ trụ. Adam lấy xương sườn số 7 bên trái của mình để tạo ra Eva vì nó gần cánh tay và trái tim của người đàn ông nên được che chở và yêu thương.

### CUỘC SỐNG

Một tuần lễ có 7 ngày.  
Nghệ thuật có 7 ngành.  
Âm nhạc có 7 nốt.  
Văn minh nhân loại có 7 kỳ quan thế giới.  
Sự tiến hóa của loài người có 7 giai đoạn.



## HÌNH ẢNH MÔ PHÒNG PHÉP CHIẾU NỔI (HAY CÒN GỌI LÀ PHÉP CHIẾU LẬP THỂ)



## ĐƠN HÌNH

**P**hép chiếu này được sử dụng để vẽ bản đồ thế giới dạng phẳng trên giấy, chứ không như quả địa cầu. Đó là một phép chiếu từ không gian 3 chiều của chúng ta vào không gian hai chiều (mặt giấy). Phép chiếu nổi đã biến đường thẳng thành đường cong là như vậy.

Đây là một vài hình chiếu của các khối đa diện trong không gian 4 chiều vào không gian 3 chiều bằng phép chiếu nổi:

<http://tinyurl.com/cu98gyb>

Công nghệ thông tin đã cho phép chúng ta thấy được những điều mà Euclide, Newton, Einstein,... nằm mơ cũng không thấy được.

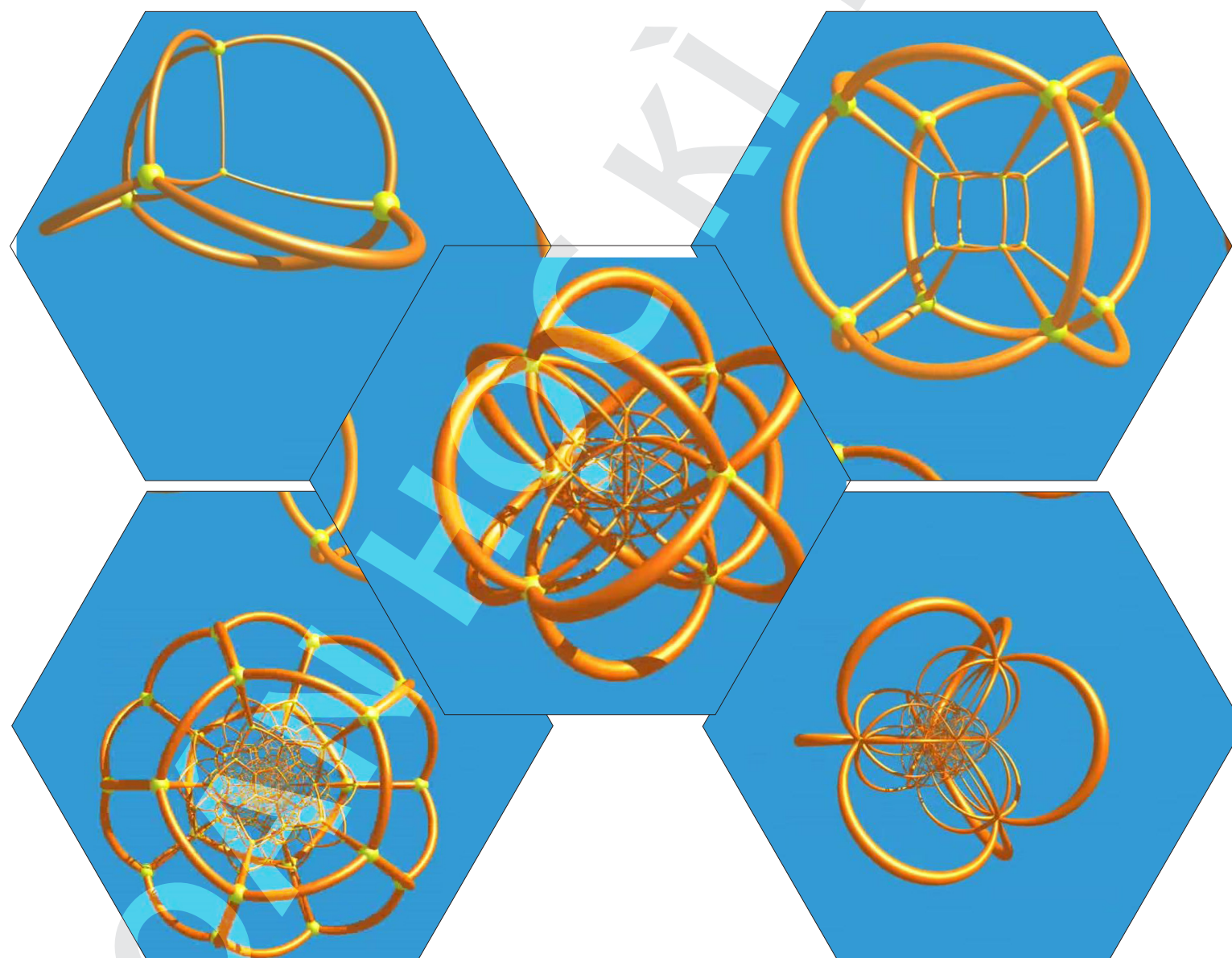
Hẳn các bạn còn nhớ trong hình học không gian ba chiều, chỉ có đúng 5 loại khối đa diện đều lồi. Đó là khối tứ diện, khối lập phương, khối tám mặt đều, khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều.

Thế còn không gian bốn chiều thì như thế nào?

Đáng tiếc là bộ não con người, dù có cố gắng cách mấy cũng không thể hình dung được chính xác, cụ thể, rõ ràng những gì trong không gian 4 chiều.

Bất chấp trong việc tưởng chừng như vô vọng đó. Bằng Toán học, các bạn vẫn có thể tìm hiểu được tính chất, và quan trọng hơn, bạn có thể tưởng tượng được một phần hình dạng của chúng.

Bằng phép chiếu nổi, ảnh bên cho thấy hình chiếu của một số vật thể chiếu trong không gian 3 chiều của chúng ta và gọi chúng là những đơn hình.



Thứ nhất là đơn hình 5 (5 đỉnh, 10 cạnh), thứ hai là đơn hình siêu lập phương (16 đỉnh, 32 cạnh), thứ ba là đơn hình 24 (24 đỉnh, 96 cạnh), kế tiếp là đơn hình 120 rất phức tạp, cuối cùng là đơn hình 600.

Thật đẹp phải không các bạn?



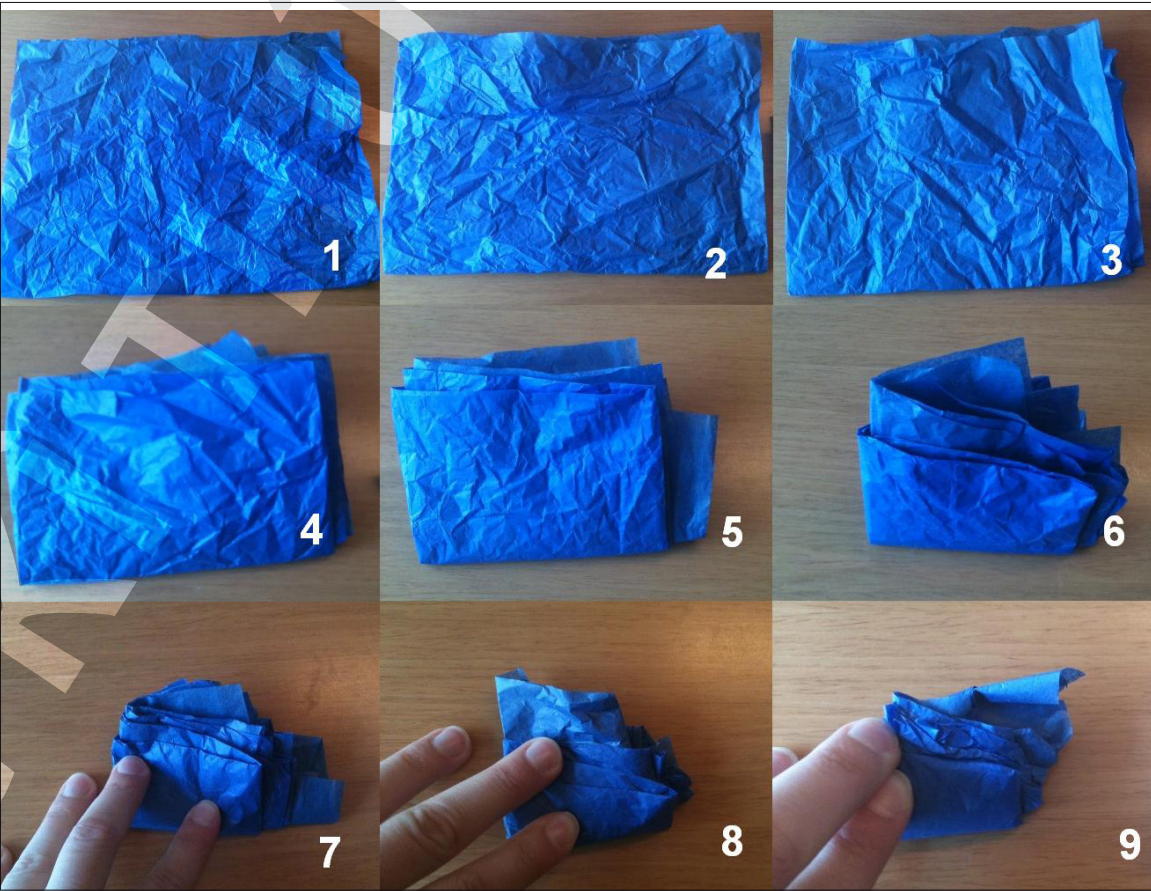
# GẤP ĐÔI TỜ GIẤY LẠI

CÓ NHỮNG HIỆN TƯỢNG, NHỮNG SỰ VIỆC ĐÔI KHI CHÚNG TA CHẴNG BAO GIỜ NGHĨ ĐẾN, THẬM CHÍ LÀ NGHĨ THOẢNG QUA. ĐẾN KHI TÌM HIỂU NÓ, CHÚNG TA LẠI THẤY NHỮNG ĐIỀU KHÔNG TƯỞNG, NHỮNG ĐIỀU THÚ VỊ, NÓ KHIẾN TA THÍCH THÚ, ĐEM LẠI CẢM XÚC KHÔNG GIẢI THÍCH ĐƯỢC.

Gấp đôi một tờ giấy lại, ai cũng đã làm, công việc chẳng thể đơn giản hơn. Nhưng nếu bạn cứ gấp đôi nó mãi thì đến khi nào bạn không thể tiếp tục được nữa?!

Câu trả lời là “Không rõ” vì nó phụ thuộc vào nhiều yếu tố: độ dày, bề rộng, chất lượng, độ bền chắc của chất liệu và cả sức lực của một hay nhiều người tham gia gấp.

Bức ảnh cho thấy một tờ giấy A4 được gấp đôi 6 lần. Có người cho rằng đó là số lần gấp tối đa với giấy A4, còn giấy vệ sinh, số đó là 9.



## ĐIỀU GÌ KHIẾN VIỆC GẤP ĐÔI MỘT TỜ GIẤY LẠI KHÓ KHĂN ĐẾN MỨC NHƯ VẬY?

Đơn giản là bạn hãy tưởng tượng như sau:  
Lần gấp thứ nhất, xấp giấy có 2 tờ.  
Lần thứ hai, 4 tờ.  
Lần thứ ba, 8 tờ...  
Lần thứ n, xấp giấy có 2^n tờ, tức là số tờ giấy trong xấp tăng theo lũy thừa 2 của các lần gấp.

Khó tin nhưng có thật:  
Gấp đôi tờ giấy A4:  
7 lần, xấp giấy sẽ dày như một cuốn sổ tay  
10 lần, xấp giấy sẽ dày như bàn tay  
17 lần (giả sử gấp được), xấp giấy sẽ cao hơn một căn nhà trung bình  
thêm 3 lần nữa, xấp giấy sẽ cao như tháp Sears  
tiếp tục 10 lần, xấp gấp sẽ vượt qua khối lớp khí quyển bao quanh địa cầu.  
Với 100 lần xếp, xấp giấy sẽ dày hơn bề rộng của một Ngân hà tầm trung!

## Kỉ lục

Số lần gấp tối đa một tờ giấy được ghi nhận vào Sách Kỉ lục Guinness. Vật liệu gì cũng được: giấy, vải, lụa,... rộng bao nhiêu, bao nhiêu người tham gia tùy ý; cần có xe, máy ép xuống cũng được, miễn gấp được nhiều lần nhất là được ghi vào sử sách!

Tháng 4 năm 2005, Britney Gallivan đã đạt được một thành tích 12 lần gấp. Britney cũng đạt được 12 lần gấp với một lá vàng dát mỏng.

Cô đạt được thành tích đó là nhờ vào việc thay đổi tuần tự hướng gấp. Cách này không áp dụng được khi gấp một bằng chất liệu dài.

Britney đã nghiên cứu tìm hiểu lý do tại sao có một giới hạn trong các cách gấp giấy. Số lần gấp lớn nhất trong cách gấp theo cùng một hướng nằm trong công thức thứ nhất trên hình. Cách gấp bằng cách tuần tự thay đổi hướng thì ở công thức thứ hai.

Tháng 4 năm 2011, một nhóm 15 học sinh trung học trường St. Mark's ở Southborough, Mass., dưới sự hướng dẫn của thầy giáo Tanton, đã đạt được 13 lần gấp theo một hướng không đổi bằng giấy vệ sinh dài 13000 feet (gần 4000 m) tại hành lang dài của Viện Đại học Kỹ thuật Massa- chusetts (MIT), vượt qua kỷ lục 12 lần năm 2002 của Britney Gallivan.



$$L = \frac{\pi t}{6} (2^n + 4)(2^n - 1)$$

trong đó

- L:** chiều dài của chất liệu.
- t:** bề dày của chất liệu.
- n:** số lần gấp có thể thực hiện được.

$$W = \pi t 2^{\frac{3(n-1)}{2}}$$

**W:** là cạnh của tờ giấy vuông có bề dày t có thể gấp đến n lần bằng cách thay đổi tuần tự hướng gấp. Với một tờ giấy không vuông, công thức cũng cho chính xác số lần gấp tối đa.

Ví dụ nhỏ:  
Bạn gấp một tờ giấy chỉ dày 1mm thì sau 12 lần gấp, nó dày lên đến 2^12=4096mm=4,096m. Độ dày tăng lên một cách khủng khiếp và không ngờ được.

Bạn hãy đi đổ bạn bè của mình gấp đôi một tờ giấy (tùy ý họ chọn nó ra sao đi chăng nữa) khoảng chừng 10, 11 lần. Phần đông trong số họ sẽ cho là chuyện đơn giản, tại sao phải đổ? Nhưng sự thật như thế nào thì bạn đã biết rồi đấy.



## ĐỐ MẸO

ĐỐ MẸO LÀ MỘT CÁCH ĐỐ THÔNG DỤNG. LỜI GIẢI CỦA NHỮNG CÂU ĐỐ MẸO RẤT ĐƠN GIẢN VÀ CÓ THỂ TÌM ĐƯỢC NHANH CHÓNG NẾU NGƯỜI GIẢI KHÁM PHÁ ĐƯỢC CÁI “MẸO” CỦA CÂU ĐỐ.

Người ra câu đố mẹo thường dựa vào những yếu tố sau đây:

- Đánh lạc sự chú ý của người giải vào những điểm quan trọng của câu đố.
- Lôi cuốn, hướng dẫn sự suy nghĩ của người giải đến những điểm có thể đưa đến một lời giải sai.
- Lợi dụng sự hấp tấp, suy nghĩ nông cạn của người giải.
- .....

Người giải sai hay không giải được câu đố mẹo, thường vì những trường hợp sau đây:

**1) Lơ đãng, thiếu chú ý hay bị phân tâm bởi những lời giải thích trong câu đố**

**a) Bạn cộng một ngàn với bốn chục, rồi cộng thêm một ngàn, rồi cộng thêm ba chục, rồi cộng thêm một ngàn, rồi cộng thêm hai chục, rồi cộng thêm một ngàn, sau cùng cộng thêm một chục. Hỏi kết quả sau cùng là bao nhiêu?**

Rất nhiều người trả lời là 5000 trong khi kết quả đúng chỉ là 4100!

Lý do: Người giải nhầm tưởng 40, 30, 20, 10 là “trăm”, bị phân tâm bởi “ngàn”.

**b) Mẹ bé An có 5 cô con gái có tên rất ngộ là: Nana, Nene, Nini, Nono, ... Hỏi vậy tên của cô con gái thứ năm là gì?**

Rất nhiều người giải sai câu đố này, cho là tên của cô con gái thứ năm là Nunu hay Nyny gì đó! Tên cô gái thứ năm là An! Rõ ràng như thế!

Lý do: Người giải không chú ý đến 3 chữ đầu “Mẹ bé An”, bị phân tâm bởi những tên nghe lạ tai.

**c) Một chiếc máy bay bị rơi ở biên giới 2 nước Đức và Pháp. Tất cả hành khách trên máy bay đều là người Pháp gốc Đức. Hỏi vậy những người sống được chôn ở quốc gia**

**nào?**

Rất nhiều người đưa ra những lý luận hùng hồn như: tùy thuộc ý muốn của gia đình nạn nhân, tùy theo xác của nạn nhân nằm ở phía bên nào! Ít người trả lời đúng là: “không ai chôn người sống bao giờ cả”

Lý do: Người giải không chú ý đến câu hỏi vô lý của câu đố, bị phân tâm bởi giả thiết “Tất cả hành khách đều là người Pháp gốc Đức”.

**2) Trả lời hấp tấp, không suy nghĩ kỹ càng, hay chủ quan cho là câu đố quá dễ**

**a) Trong một cuộc đua đi bộ, nếu bạn qua mặt người đứng thứ nhì thì thứ hạng của bạn là bao nhiêu?**

Nhiều người nghĩ rằng câu đố đó quá dễ và trả lời ngay “Qua mặt người thứ nhì thì bạn là người thứ nhất chứ gì nữa!”. Câu trả lời đúng là: “Bạn qua mặt người thứ nhì thì bạn đứng thứ nhì”.

Lý do: Hấp tấp, không suy nghĩ kỹ càng. Quá chủ quan!

**b) Trong một cuộc đua đi bộ, nếu bạn qua mặt người đi chót thì thứ hạng của bạn thay đổi thế nào?**

Nhiều người nhanh nhẩu trả lời là “Qua mặt người đi chót, thì bạn là người kế chót”. Thật ra câu trả lời đúng phải là “Câu đố này vô lý, vì sau người đi chót thì đâu còn ai nữa mà qua mặt với không qua mặt!”.

Lý do: Thiếu suy nghĩ kỹ càng, lại quá chủ quan!  
**c) Trước khi núi Everest được khám phá, ngọn núi cao nhất thế giới tên là gì?**

Nhiều người chịu thua, không trả lời được. Câu trả lời đúng đó là “núi Everest lúc chưa được khám phá”. Ngọn Everest là ngọn núi cao nhất trên thế giới, thì không có ngọn núi cao nhất

trên thế giới nào khác hơn là ngọn Everest!

Lý do: Không suy nghĩ kỹ để thấy cái “mẹo” của câu đố.

## SỐ HOÀN HẢO

Số hoàn hảo (hay còn gọi là số hoàn chỉnh, số hoàn thiện) là số bằng tổng các số mà nó chia hết (không kể nó).

Ví dụ: Số 6 chia hết cho 1, 2, 3 và  $6=1+2+3$ .

Vậy 6 là số hoàn hảo.

Các số 28, 496, 8128 cũng là số hoàn hảo.

Đây cũng là bốn số hoàn hảo đầu tiên được

những người Hy Lạp cổ đại phát hiện.

Đến nay, các số hoàn hảo tìm được luôn là các số chẵn, chưa có một số hoàn hảo lẻ nào được tìm ra.

Perfect numbers,  
like perfect men,  
are very rare.

-Rene Descartes

Nhà Toán học Rene Descartes đã nói:

“Các số hoàn hảo, cũng như những con người hoàn hảo, rất hiếm có.”

## SỐ 3 Ở KHẮP MỌI NƠI?

Trước hết kể đến đó là những số 3, 33, 333, 3 333, 33 333, 333 333, 3 333 333,... vô hạn.

Bạn có thể cho rằng “ừ thì cũng có vô hạn các số không chứa số 3”, chẳng hạn 5, 55, 555, 5 555, 55 555, 555 555, 5 555 555,... cứ thế.

Vậy tại sao lại có thể nói “Số 3 ở khắp mọi nơi”?

Bạn hãy xem lí luận sau đây:

-Xét trong phạm vi 10: chỉ có 1 số 3, chiếm 10%.

-Xét trong phạm vi 100: đó là các số 3, 13, 23, 43, 53, 63, 73, 83, 93 và từ 30 đến 39; tất cả là 19 số, chiếm 19%.

-Xét trong phạm vi 1000: gồm tất cả các số trên

và những số mà ta thêm các số 1 đến 9 vào trước chúng, các số từ 300 đến 399; tất cả có 271 số, chiếm 27,1%.

...

cứ tiếp tục xem xét như thế.

Xét trong phạm vi càng lớn, tỉ lệ % bạn nhận được càng nhiều. Nếu bạn xét trong phạm vi  $10^n$ , với n rất lớn, thậm chí ra vô cùng, bạn sẽ nhận được tỉ lệ tròn trĩnh là 100%.

Đó là lí do tại sao nói Số 3 ở khắp mọi nơi.

Nhưng bạn cũng có thể áp dụng câu nói đó cho mọi số khác nữa.



# CÁC CON SỐ & NHỮNG PHÉP TOÁN

CHỈ VỚI CÙNG MỘT SỐ VÀ NHỮNG PHÉP TOÁN CƠ BẢN CỘNG, TRỪ, NHÂN CHIA, LẤY CĂN, LUYỆN THỪA, CÁC SỐ TỪ 1 TRỞ ĐI ĐƯỢC BIỂU DIỄN MỘT CÁCH VÔ CÙNG THÚ VỊ.

BỐN SỐ 9

$1 = \frac{9+9}{9+9}$	$11 = 9 - \frac{9}{9} + \sqrt{9}$
$2 = \frac{9+\sqrt{9}}{9-\sqrt{9}}$	$12 = \sqrt{9} + \sqrt{9} + \sqrt{9} + \sqrt{9}$
$3 = \frac{9+9}{\sqrt{9}+\sqrt{9}}$	$13 = 9 + \frac{9}{9} + \sqrt{9}$
$4 = \left(\frac{9+\sqrt{9}}{9-\sqrt{9}}\right)^2$	$14 = \frac{99}{9} + \sqrt{9}$
$5 = \left(9 - \frac{9}{9}\right) - \sqrt{9}$	$15 = \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} + \sqrt{9} + \sqrt{9}$
$6 = \sqrt{9} + \sqrt{9} + \sqrt{9} - \sqrt{9}$	$16 = \left(\frac{9+\sqrt{9}}{9-\sqrt{9}}\right)^4$
$7 = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9}} + \sqrt{9} + \sqrt{9}$	$17 = 9 + 9 - \frac{9}{9}$
$8 = 2^3 = \left(\frac{9+\sqrt{9}}{9-\sqrt{9}}\right)^3$	$18 = \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{9}$
$9 = \frac{9+9+9}{\sqrt{9}}$	$19 = 9 + 9 + \frac{9}{9}$
$10 = \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} + \frac{9}{9}$	$20 = \frac{99}{9} + 9$

$$\begin{aligned}
 (4+4) - (4+4) &= 0 & (44-4)/4 &= 10 \\
 (4+4)/(4+4) &= 1 & 44/(\sqrt{4} \times \sqrt{4}) &= 11 \\
 (4/4) + (4/4) &= 2 & 4 \times (4 - (4/4)) &= 12 \\
 4 - (4^{4-4}) &= 3 & (44/4) + \sqrt{4} &= 13 \\
 4 + ((4-4) \times 4) &= 4 & 4 + 4 + 4 + \sqrt{4} &= 14 \\
 4 + (4^{4-4}) &= 5 & (44/4) + 4 &= 15 \\
 4 + ((4+4)/4) &= 6 & (4^{4/4}) \times 4 &= 16 \\
 (4+4) - (4/4) &= 7 & (4 \times 4) + (4/4) &= 17 \\
 (4+4) + (4-4) &= 8 & (4 \times 4) + 4 - \sqrt{4} &= 18 \\
 (4+4) + (4/4) &= 9 & 4! - 4 - (4/4) &= 19 \\
 (4 \times 4) + \sqrt{4} + \sqrt{4} &= 20
 \end{aligned}$$

BỐN SỐ 4



$$\begin{aligned}
 6+6+6-6-6-6 &= 0 & 6+6+6+\frac{6}{6} &= 19 \\
 \frac{6+6+6}{6+6+6} &= 1 & 6+6+6+\frac{6+6}{6} &= 20 \\
 \frac{6+6+6+6}{6+6} &= 2 & \frac{(6+6.6).6}{6+6} &= 21 \\
 \frac{6+6+6}{6+6-6} &= 3 & \frac{(6+6).6+6!}{6.6} &= 22 \\
 \frac{6+6}{6} + \frac{6+6}{6} &= 4 & 6+6+6+6-\frac{6}{6} &= 23 \\
 \frac{6+6+6+6+6}{6} &= 5 & \frac{6+6}{6} - 6-6 &= 24 \\
 \left(\frac{6+6+6}{6}\right)! + 6-6 &= 6 & 6+6+6+6+\frac{6}{6} &= 25 \\
 \left(\frac{6+6+6}{6}\right)! + \frac{6}{6} &= 7 & 6.6 - \frac{66-6}{6} = 6 + C_6^{\frac{6+6+6}{6}} &= 26 \\
 \frac{6+6}{6} + 6+6-6 &= 8 & 6+6+C_6^{\frac{6+6}{6}} &= 27 \\
 \frac{6.6}{6-\frac{6+6}{6}} &= 9 & 6.6-6-\frac{6+6}{6} &= 28 \\
 6 + \frac{6+6+6+6}{6} &= 10 & 6 \cdot \left(6-\frac{6}{6}\right) - \frac{6}{6} &= 29 \\
 6+6-\frac{6}{6}+6-6 &= 11 & 6.6-6+6-6 &= 30 \\
 6+6+6-6+6-6 &= 12 & 6 \cdot \left(6-\frac{6}{6}\right) + \frac{6}{6} &= 31 \\
 6+6+\frac{6}{6}+6-6 &= 13 & \left(\frac{6+6}{6}\right)^{6-\frac{6}{6}} &= 32 \\
 6+6+\frac{6}{6}+\frac{6}{6} &= 14 & 6.6-\frac{6+6+6}{6} &= 33 \\
 6+6+\frac{6+6+6}{6} &= 15 & 6.6-\frac{6}{6}-\frac{6}{6} &= 34 \\
 6+6+6-\frac{6+6}{6} &= 16 & 6.6-\frac{6}{6}+6-6 &= 35 \\
 \text{Toán} & \pi & 6+6+6+6+6+6 &= 36 \\
 \text{Hoc} & & \frac{(6+6+6).(6+6)}{6} &= 36 \\
 \text{Ki} & & & \\
 \text{Thư} & & &
 \end{aligned}$$

6 số 6

Như các bạn đã biết, Pi là một hằng số toán học có giá trị bằng tỷ số chu vi đường tròn với đường kính của đường tròn đó. Hằng số này, được kí hiệu là  $\pi$ , xấp xỉ bằng 3,14159265.

$\pi$  là một số vô tỷ, tức là phần thập phân sau dấu phẩy của nó kéo dài mãi không dứt. Bài Toán tìm hiểu xem các con số này liệu có quy luật nào hay không vẫn đang bỏ ngõ, không ai biết được.

Trang web trên cho bạn biết dãy số ngày tháng năm sinh của bạn xuất hiện tại vị trí thứ bao nhiêu trong số  $\pi$ .

Chẳng hạn, sinh ngày 4 tháng 5 năm 1991 thì nhập 5491 (không nhập 050491), trang web sẽ trả lại kết quả là vị trí thứ 13620 trong số  $\pi$ .

Rất thú vị phải không các bạn? Hãy comment xem bạn ở vị trí thứ mấy?

## 2519

Điều thú vị từ con số 2519:

- 2519 chia 2 dư 1.  
2519 chia 3 dư 2.  
2519 chia 4 dư 3.  
2519 chia 5 dư 4.  
2519 chia 6 dư 5.  
2519 chia 7 dư 6.  
2519 chia 8 dư 7.  
2519 chia 9 dư 8.  
2519 chia 10 dư 9.

cụ thể:

- $$\begin{array}{l} 1259 \times 2 + 1 = 2519 \\ 839 \times 3 + 2 = 2519 \\ 629 \times 4 + 3 = 2519 \\ 503 \times 5 + 4 = 2519 \\ 419 \times 6 + 5 = 2519 \\ 359 \times 7 + 6 = 2519 \\ 314 \times 8 + 7 = 2519 \\ 279 \times 9 + 8 = 2519 \\ 251 \times 10 + 9 = 2519 \end{array}$$

666

- 5 x 666: Tháng 9/1923.

- 11 x 666: Tháng 12/1941.

- 17 x 666: Tháng 8/1945.

Ngày 6/8, Mỹ ném bom nguyên tử xuống Hiroshima.

Tháng 8/1945, hơn 2 triệu người Việt Nam đã chết vì đói.

- 34 x 666: Tháng 8/1976.

Ngày 28/7, bùng phát một loạt thảm họa như bệnh Ebola ở châu Phi, động đất lớn nhất thế kỷ ở Trung Quốc.

Ngoài ra, nếu các con số 1 đến 9 biểu thị các chữ cái A đến I, 10 đến 90 biểu thị K đến S, 100 đến 500 biểu thị T đến Z thì Martin Luther (nhà cải cách Tôn giáo, "Kẻ thù của Chúa", viết theo tiếng Hy Lạp có tổng các số đúng bằng 666.

Con số 666 trong Toán học cũng có nhiều điểm khá kỳ lạ như

$$\begin{aligned} 666 &= 6.6 - 6.6 + 6 \\ 666 &= 6.6 + 6.6 + 6.6 + 6 + 6 + 6 \\ 666 &= 2.2 + 3.3 + 5.5 + 7.7 + 11.11 + 13.13 \\ 666 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 567 + 89 = 123 + 456 + 78 + 9 = 9 + 87 + 6 + 543 + 2 \end{aligned}$$

Sau đây là các số nguyên tố (là số lớn hơn 1 và chỉ chia hết cho 1 và chính nó), chúng được chứng minh là số nguyên tố vào thế kỉ XVII:  
31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331

Con số tiếp đó là 33333331 không phải là số nguyên tố, thật vậy

$$333333331 = 17 \times 19607843$$



# KÍCH THƯỚC GIẤY

CÓ BAO GIỜ BẠN THẮC MẮC VỀ KÍCH THƯỚC CÁC LOẠI GIẤY A?

Một tờ giấy A4 có bề ngang hay bề rộng là 210 mm và bề dài hay bề cao là 297 mm. Đó là kích thước thông dụng nhất của giấy dùng trong phần lớn các quốc gia.

Tại sao chúng ta lại không chọn kích thước nào đơn giản hơn như 200 x 300 chẳng hạn?  
Mọi thứ đều có lý do của nó!

HÌNH SỐ 1:

Nếu bạn cắt tờ giấy A4 (màu xanh) ở giữa theo đường song song với chiều ngang, thành 2 phần bằng nhau (màu vàng), thì mỗi phần có kích thước 210 mm và  $297/2 = 148.5$  mm. Đó là kích thước của giấy A5.

Giấy A5 có diện tích bằng nửa diện tích của giấy A4 nhưng cả hai đều có tỉ lệ giữa chiều ngang và chiều dài gần giống nhau:  
 $210 / 297 = 0.707070707 \dots$   
 $148.5 / 210 = 0.707142857 \dots$

Đó cũng là lời giải gần đúng duy nhất của bài toán Diophantine không tuyến tính, không giải được bằng số hữu tỉ  $b^2 = 2a^2$  với a và b lần lượt là chiều ngang và chiều dài của hình chữ nhật.

Nếu tiếp tục cắt giấy A5 (màu vàng) theo đường song song với chiều ngang của tờ giấy, bạn được 2 tờ giấy A6 (màu đỏ), có kích thước 105 mm x 148.5 mm. Tỉ lệ kích thước của A6 cũng giống như với A4 và A5, tức là:  
 $105/148.5 = 0.707070707 \dots$

Cắt giấy A6 (màu đỏ) thành 2 phần bằng nhau, bạn được giấy A7 (màu xanh lam), kích thước 74.25 mm x 105 mm.

Tiếp tục, bạn có giấy A8 (màu hồng nhạt), kích thước 52.5 mm x 74.25 mm.

A4 là một thành phần của chuỗi ISO 216 về kích thước của các khổ giấy, thường được biết đến là chuỗi kích thước A. Chuỗi này cũng bao gồm những kích thước lớn hơn kích thước A4 như sau:

HÌNH SỐ 2:

Nếu bạn nối 2 tờ giấy A4 theo chiều dài, bạn sẽ được tờ giấy A3, có kích thước 420 mm x 297 mm, diện tích gấp đôi diện tích của giấy A4 và có gần đúng tỉ lệ kích thước như A4:  
 $297 / 420 = 0.707142857$ .

Dán 2 tờ giấy A3 theo chiều dài (420 mm), bạn được giấy A2,

kích thước 420 mm x 594 mm.

Tiếp tục với giấy A2, bạn được giấy A1, với giấy A1, bạn được giấy A0:

Giấy A1: 594 mm x 840 mm

Giấy A0: 840 mm x 1,188 mm

Diện tích giấy A0 bằng  $840 \times 1188 = 997920 \text{ mm}^2$ , gần bằng 1 mét vuông. Trong những giao dịch thông thường, giấy A0 thường được xem như chứa 1 mét vuông giấy.

Một nhận xét lý thú về kích thước của các khổ giấy A trong chuỗi ISO 216: với giấy A0:

Chiều dài / chiều ngang =  $1,188 / 840 = 1.414285$

Tỉ số đó gần bằng  $\sqrt{2} = 1.414213$ .

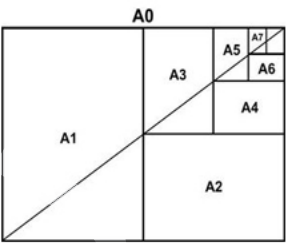
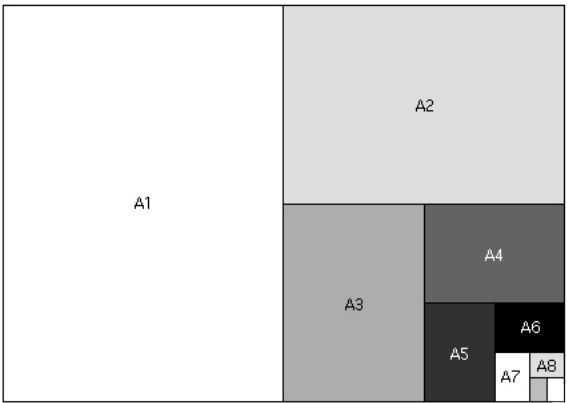
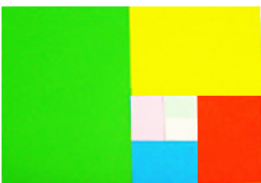
Chiều ngang / Chiều dài =  $840 / 1,188 = 0.707070707 \dots \sim 1/\sqrt{2}$

Markus Kuhn đề nghị tỉ số  $1/\sqrt{2}$  được gọi là tỉ số Lichtenberg, để vinh danh giáo sư người Đức Georg Christoph Lichtenberg, người đã đề nghị lấy tỉ số đó làm căn bản cho sự xác định kích thước các kiểu giấy năm 1786.

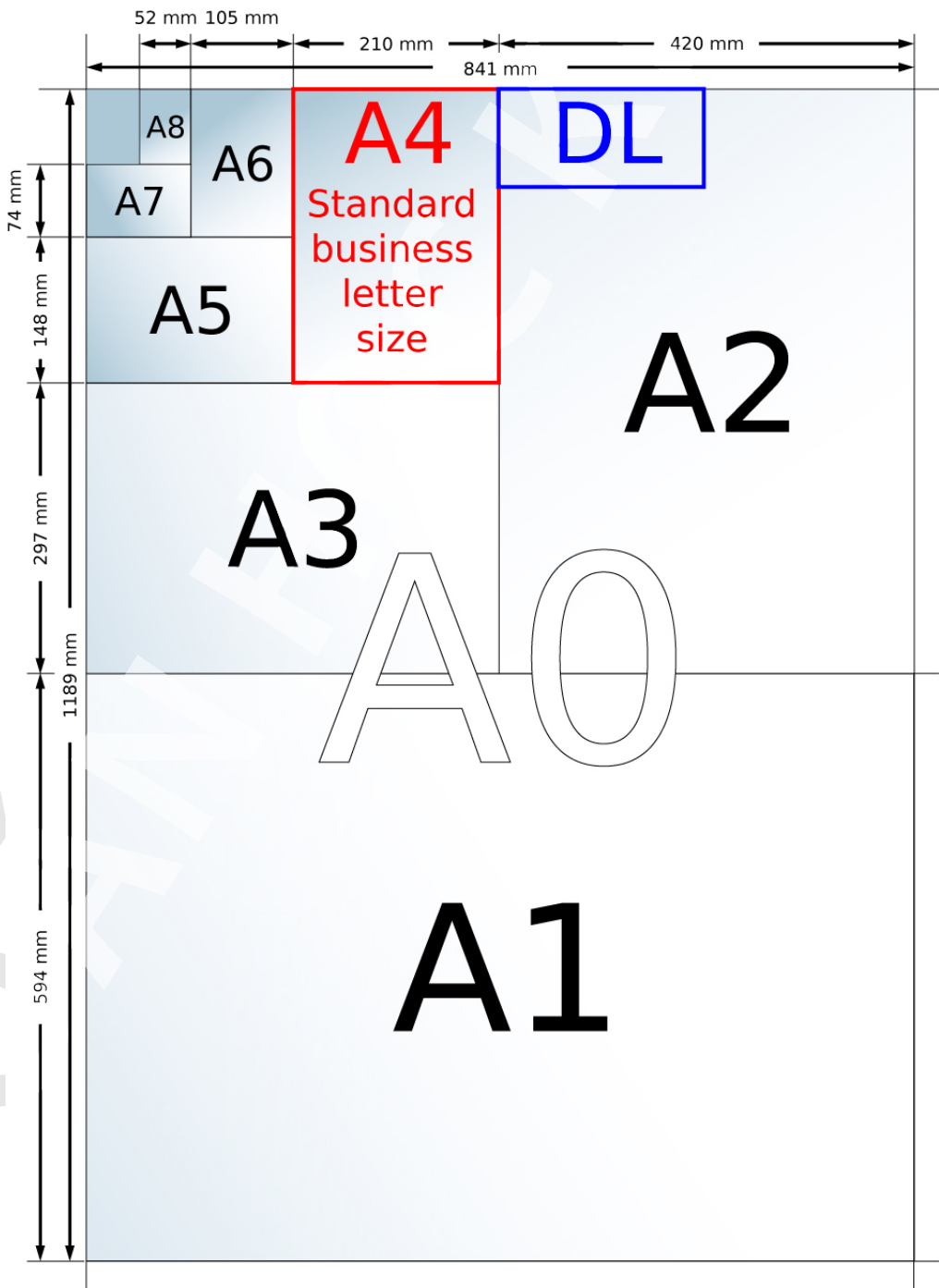
Quan sát HÌNH SỐ 3, bạn sẽ đường chéo của giấy A0 đi qua những điểm rất đặc biệt. Cái “đẹp” về kích thước giấy chuỗi A được thể hiện ở đó.

Riêng ở Mỹ và Canada, giấy để viết hay in tài liệu thường có kích thước giấy viết thư, gọi là giấy Letter-size hay giấy US Letter. Giấy này có kích thước 8.5” x 11” (ký hiệu “ chỉ inch bằng 25.4 mm). Kích thước của giấy A4 và giấy US Letter không giống nhau. Kích thước của giấy A4 tính theo inch là 8.26” x 11.69” và của giấy US Letter tính theo millimet là 215.9 mm x 279.4 mm.

Với US Letter, khổ giấy được quy định như bảng trên hình.



Tên giấy	Chiều Ngang (inch)	Chiều dài (inch)	Chiều dài / Chiều ngang
A (Letter)	8.5	11.5	1.294
B (Tabloid)	11.0	17.0	1.545
C	17.0	22.0	1.294
D	22.0	34.0	1.545
E	34.0	44.0	1.295



# ROKE1984

FONT CHỮ THIẾT KẾ MANG ĐẬM PHONG CÁCH TOÁN HỌC

Nếu bạn đang muốn thiết kế một dự án nào đó mang chất Toán hay đơn giản hơn bạn là sinh viên chuẩn bị một bài thuyết trình về bộ môn Toán nào đó mình đang học thì font chữ ROKE1984 quả là một sự lựa chọn sáng suốt.

ROKE1984 là một font chữ dạng Novelty, chuyên dùng để trang trí, làm nổi bật dự án của bạn bởi cách thiết kế độc nhất, không giống ai của nó. Mỗi một chữ của ROKE1984 được phá cách bởi các kí hiệu Toán học:  $x^2$ , 90 độ, và kí hiệu vuông góc cùng những đường thẳng hay nét đứt trông rất Hình học.

ROKE1984 được bán với giá 10USD (8USD với sinh viên, học sinh)



## DYSCALCULIA

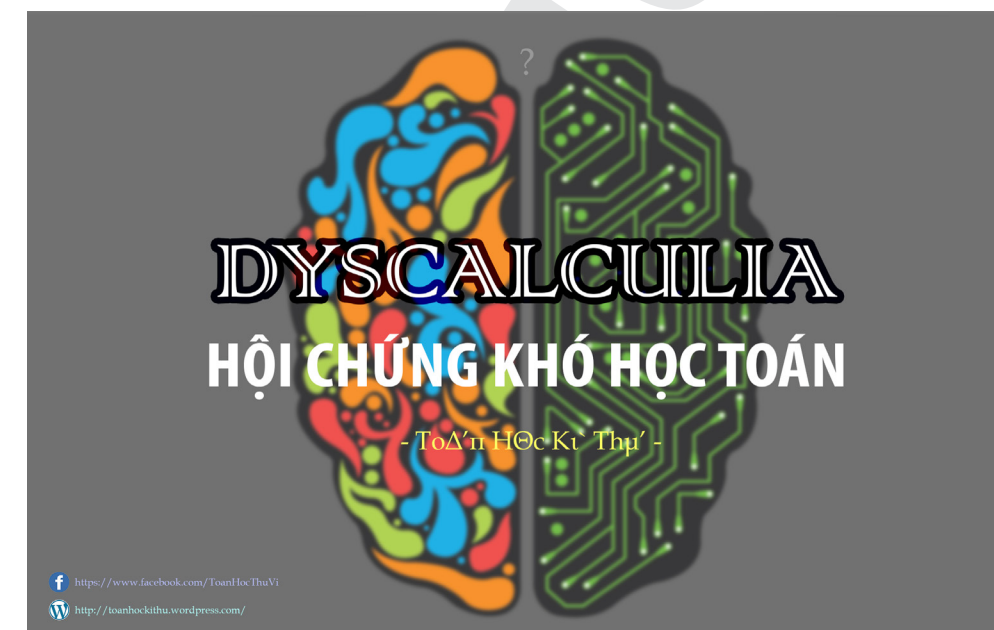
HỘI CHỨNG KHÓ HỌC TOÁN

Tương tự như hội chứng khó đọc, Dyscalculia là hội chứng gây khó khăn cho việc tính Toán và tiếp nhận, lĩnh hội những khái niệm, định nghĩa Toán học, chính xác là Số học, Đại số.

Có nhiều nguyên nhân gây ra hội chứng, chẳng hạn:

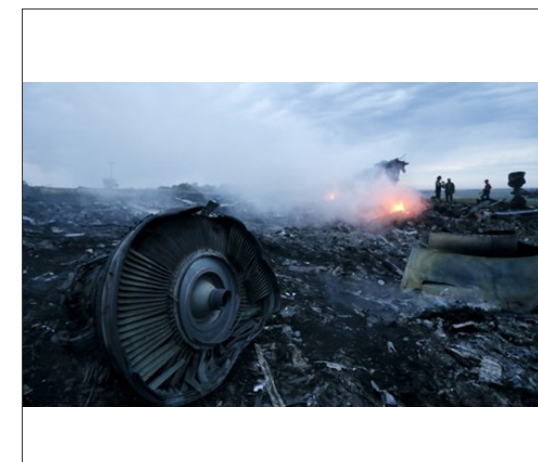
- Trí nhớ ngắn hạn.
- Do tâm lí: sự sợ hãi, chán ghét Toán học ngấm phát triển thành Dyscalculia.
- Bẩm sinh và di truyền, mặc dù điều này chưa được xác nhận.

Tin vui là Dyscalculia có thể chữa được. Ước tính tỉ lệ dân số mắc Dyscalculia là vào khoảng 3% đến 6%.



## SỐ 7 ĐỊNH MỆNH

Bạn có biết, chiếc máy bay bị rơi của Malaysia Airline:  
Đi vào hoạt động ngày 17/7 năm 1997.  
Số hiệu MH17.  
Loại Boeing 777.  
Bị rơi ngày 17/7 năm 2014.  
Thời điểm bị rơi: 17 giờ 17 phút giờ Ukraine.  
Thời gian hoạt động: 17 năm.



## THẮC MẮC

- Một năm bằng bao nhiêu giây?
- Không cần tính cũng có thể nói được ngay là một năm gần bằng  $\pi \times 10^7$  giây.
- Tại sao lại có số  $\pi$ ?
- Vì quỹ đạo của trái đất quanh mặt trời là hình tròn.
- Tại sao lại lũy thừa 7?
- Vì một tuần có 7 ngày.
- Tại sao lại gần bằng, mà không phải là đúng bằng?
- Vì quỹ đạo của Trái đất quanh mặt trời thực ra không phải hình tròn, mà là elip.

Trích từ blog của Đàm Thanh Sơn





## SỐ LA MÃ



Số La Mã là một hệ thống số có nguồn gốc từ Roma cổ đại, dựa theo chữ số Etruria. Hệ thống chữ số La Mã dùng trong thời cổ đại đã được người ta chỉnh sửa sơ vào thời Trung Cổ để biến nó thành dạng mà chúng ta sử dụng ngày nay. Hệ thống này dựa trên một số ký tự nhất định được coi là chữ số sau khi được gán giá trị.

Chữ số La Mã vẫn tiếp tục được sử dụng cho đến khi chế độ La Mã suy tàn và cho đến thế kỷ 14 thì nó đã không còn được sử dụng rộng rãi bởi tính tiện dụng của chữ số Ả Rập (là các chữ số chúng ta sử dụng ngày nay được tạo thành bởi các số từ 0 đến 9), tuy nhiên số La Mã vẫn được sử dụng phổ biến ngày nay trong những bản kê được đánh số (ở dạng sườn bài), mặt đồng hồ, những trang nằm trước phần chính của một quyển sách, tam nốt hợp âm trong âm nhạc phân tích, việc đánh số ngày xuất bản của phim, những lãnh đạo chính trị tiếp nối nhau, hoặc trẻ em trùng tên, và việc đánh số cho một số hoạt động nào đó.

Một điều ít ai để ý là số 0 không có trong hệ thống ký hiệu số La Mã.

Nếu bạn là một người đam mê điện ảnh đúng nghĩa, bạn không thể không biết đến IMDb - cơ sở dữ liệu thông tin về điện ảnh lớn nhất hiện nay, được mệnh danh là Google của điện ảnh.

IMDb cung cấp cho bạn tất tần tật mọi thông tin về một bộ phim cụ thể, từ tối thiểu cho đến chi tiết nhất, từ phim xa xưa nhất đến phim mới nhất và ở mọi quốc gia.

IMDb còn có tính năng tương tác như một mạng xã hội, bạn có thể tạo list phim yêu thích của riêng mình, chia sẻ với bạn bè và điểm nổi bật nhất, là bạn được quyền đánh giá, chấm điểm một bộ phim trên thang điểm 10.

Điều đó là hiển nhiên, khán giả là những vị giám khảo công tâm nhất và một bộ phim cũng là một tác phẩm nghệ thuật, cần phải có một sự đánh giá. Chính vì vậy, IMDb có một bản danh sách gọi là IMDb Top 250, tức là 250 bộ phim điện ảnh hay nhất của IMDb.

## TOÁN HỌC VÀ ĐIỆN ẢNH

Như vậy, bạn có thể thấy điểm chấm bởi công thức và điểm chấm trung bình rất gần nhau, có thể coi là một. Tại sao lại không lấy điểm chấm trung bình cho đơn giản?

Câu trả lời là điểm chấm trung bình không đủ công bằng để đánh giá. Bởi vì rất nhiều trường hợp chấm bừa, đó là những thành phần sau:

- những user chưa coi phim đã đánh giá, nhìn thấy hay hay nên chắc là phim hay.
- những user thuộc một hãng phim đối thủ của bên phim được đánh giá.
- những user đơn giản vì ghét một diễn viên nào đó trong phim nên "dìm hàng".
- những user đánh giá nhầm, click nhầm số điểm.

....

Công thức trên hạn chế được điều đó, thể hiện ở hằng số 7 và 25000, như là một điều kiện đi kèm. Hơn nữa, chỉ những user thường xuyên chấm điểm các phim trên IMDb mới được ghi nhận đánh giá, còn những user chỉ đánh giá một vài phim sẽ không được công nhận.

Bạn coi được bao nhiêu phim của IMDb Top 250? Admin coi được hơn nửa. Phim nào cũng xứng đáng được lưu truyền hậu thế cho đến ngày loài người diệt vong. Hãy dẹp bỏ những phim Hàn suốt mướt, uỷ mị, vớ vẩn. 250 bộ phim này sẽ làm thay đổi thế giới quan và cách nhìn nhận của bạn.

Công thức tính điểm của IMDb được thể hiện trên hình, trong đó:

R (rating): điểm chấm trung bình.

v (votes): số lượng người tham gia chấm điểm.

m (minimum votes): số lượng người tối thiểu tham gia chấm điểm, hiện tại là 25000.

C: hằng số chấm điểm ý nghĩa, hiện tại là 7.

Chỉ những user thường xuyên chấm điểm các phim trên IMDb mới được ghi nhận đánh giá.

Chúng ta lấy ví dụ cho phim The Dark Knight:


Truy cập IMDb, ta có được

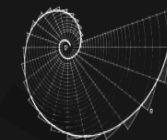
Điểm chấm trung bình R=9

Số lượng user tham gia chấm điểm v=1 013 816

Hai hằng số m=25 000 và C=7.

Áp dụng công thức, chúng ta tính được 8.95.


$$\frac{Rv + Cm}{v + m}$$



$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988749894848204586834365$$

# CÁC SỰ THẬT KÌ THÚ VỀ TOÁN HỌC

- ΤοΔ'π

**SỐ 1.**  $0^0$  có thể bằng 1 hoặc là không xác định tùy trường hợp.

**SỐ 2.** Pi là một số vô tỷ, tức là phần sau dấu phẩy kéo dài vô hạn, nó chứa được đầy số ngày tháng năm sinh của bất kì ai trên thế giới này.

**SỐ 3.** Bạn không thể gấp đôi một tờ giấy quá 12 lần.

**SỐ 4.** Chỉ cần một nhóm 23 người là có đến 50% xác suất trong đó ít nhất 2 người có cùng ngày sinh.

**SỐ 5.** Toán học vừa được khám phá, vừa được phát minh.

**SỐ 6.** Có một chứng "bệnh" gọi là "đồng giác", nó sẽ khiến bạn cảm nhận các con số có cấu tạo và hình dáng, có màu sắc và mùi vị.

**SỐ 7.** Mọi số tự nhiên đều có đặc tính riêng của nó, khiến nó trở nên thú vị.

**SỐ 8.** 0 nhân 1 bằng 0 là do số nào nhân 0 cũng bằng 0 chứ không phải vì số nào nhân 1 cũng bằng chính nó.

**SỐ 9.** Việc sử dụng tỉ lệ vàng trong thiết kế logo và iPhone của Apple khiến cho nó trở nên cân xứng và hoàn mỹ.

**SỐ 10.** Ngày 28/2 năm nay là thứ Năm, đó cũng là thứ của những ngày 4/4, 6/6, 8/8, 10/10, 12/12; 9/5, 5/9, 7/11, 11/7; và 3/1, 7/3. Như vậy, bạn có thể tính nhẩm được thứ của ngày tháng bất kì trong năm nay một cách dễ dàng.

**SỐ 11.** Người phát hiện ra nhật thực đầu tiên là một nhà Toán học.

**SỐ 12.** Hình dạng vũ trụ có thể là hữu hạn nhưng nếu bạn cứ đi thẳng mãi ra ngoài không gian, bạn sẽ không bao giờ tìm được điểm dừng.

**SỐ 13.** Năm 1916, Einstein công bố Thuyết Tương đối Tổng quát, khi đó khái niệm Không-thời gian mới xuất hiện. Nhưng 21 năm trước đó, năm 1895, một nhà văn đã mô tả một cách chính xác ý tưởng Không-thời gian trong một quyển tiểu thuyết Khoa học viễn tưởng của mình.

**SỐ 14.**  $0,9999999... = 1$   
Rất đơn giản, bởi vì  
 $1/9 = 0,1111111... \Rightarrow 9 \times 1/9 = 9 \times 0,111111... \Rightarrow 1 = 0,999999...$

**SỐ 15.** Bạn đã từng nghe đến số Palindrome bao giờ chưa? Đó là tên gọi chung cho những số xuôi ngược như nhau.  
Ví dụ: 24542, 1991991,...

**SỐ 16.** Số 5 trong tiếng Thái phát âm là "Ha". Vì thế 555 phát âm thành "Hahaha".  
Thế nên đôi khi người Thái "Hahaha" thì chẳng biết được họ có cười thật hay không?

**SỐ 17.** Trong tiếng Anh, Four là từ duy nhất có số chữ cái bằng số lượng mà nó mô tả (4).

**SỐ 18.** Kí hiệu chỉ sự giống nhau, hay bằng nhau (=) được sáng tạo bởi nhà Toán học Robert Recode vào năm 1557.  
Ông cho rằng "thật chẳng có gì giống nhau hơn nữa như hai dấu gạch".

**SỐ 19.** Cũng trong tiếng Anh, chữ "a" có tần suất xuất hiện nhiều nhất trong các từ.  
Nhưng trong các từ chỉ con số từ 0 đến 1000, nó chỉ xuất hiện duy nhất một lần. Đó là "one thousand" (1000).

**SỐ 20.** Số nguyên tố lớn nhất hiện nay biết được có 9 808 358 chữ số. Con số này còn lớn hơn số lượng nguyên tử có trong vũ trụ.

**SỐ 21.** Đối với những nước nói tiếng Anh, cách dễ nhất để nhớ số Pi (3.1415926) đó là ghi nhớ câu "May I have a large container of coffee".

**SỐ 22.** Ở tuổi teen, nhà Toán học Galois đã sáng tạo nên một nhánh mới của Toán học chứng minh rằng "Các phương trình đa thức bậc 5 không thể có công thức nghiệm (qua các phép Toán đại số)".

**SỐ 23.** Không có một hệ thống lý thuyết Toán học nào hoàn hảo, luôn có những lỗ hổng, tồn tại những nghịch lí và những điều không thể khẳng định cũng không thể phủ định được.

**SỐ 24.** Một phép tính hay  
 $111.111.111 \times 111.111.111 = 12.345.678.987.654.321.$

**SỐ 25.** Ít ai để ý rằng số 0 không có trong kí hiệu hệ thống số La Mã.

**SỐ 26.** Thêm một phép tính hay khác  
 $(6 \times 9) + (6 + 9) = 69.$

**SỐ 27.** Theo một thống kê cho thấy, 7 được xem là con số may mắn, hơn cả số 12 và tiếp đó là số 3.

**SỐ 28.** Nếu bạn xào bài đúng cách, khả năng để các lá bài xếp đúng theo thứ tự cũ sẽ không bao giờ xảy ra trong lịch sử vũ trụ nhân loại.

**SỐ 29.** 10! đúng bằng 6 tuần.  
 $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$  giây  
 $= 42$  ngày  $= 6$  tuần, không hơn không kém.

**SỐ 30.** Nếu bạn có một chiếc Pizza bán kính Z, độ dày A thì thể tích của nó là  $\pi \times Z^2 \times A$ .

**SỐ 31.** Số 4 được coi là số không may mắn trong hầu hết các nước Châu Á. Vì nó được phát âm trong tiếng Nhật, Quảng Đông, Quan Thoại, Hàn, Hán Việt (shi, sei, si, sa, tứ) gần như là "chết".

**SỐ 32.** 2520 là con số nhỏ nhất chia hết cho tất cả các số từ 1 đến 10.

**SỐ 33.** Người Ai Cập cổ đại tính Toán trên hệ cơ số 60 thay vì cơ số 10 như hiện nay. Đó là lí do tại sao 60 giây một phút và 360 độ một đường tròn.

**SỐ 34.** Trong phạm vi các số từ 0 đến 10, mỗi một số đều có thể nhân hoặc chia với một số khác để được số mới cũng trong phạm vi 0 đến 10. Chẳng hạn,  $5 \times 2 = 10$ ; 6 và 9 thì chia 3,...  
Duy nhất chỉ có số 7 là không làm được điều đó.

**SỐ 35.** Năm 1900, toàn bộ sách Toán trên thế giới chỉ có khoảng 80 quyển. Ngày nay, con số đó đến hơn 100 000.

**SỐ 36.** Trong tiếng Anh, "Billion" nghĩa là "tỉ" và tiếp đó là Trillion, Quadrillion, Quintillion, Sextillion, Septillion, Octillion, Nonillion, Decillion and Undecillion.

**SỐ 37.** Trong quyển Những nguyên lí Toán học của Isaac Newton có một lỗi tính toán cơ bản mà không ai hay trong suốt 300 năm kể từ khi nó ra đời.

**SỐ 38.** Bạn có thể cho rằng các số tự nhiên nhiều hơn các số chẵn nhưng sự thực thì số lượng của chúng là bằng nhau.

**SỐ 39.** Sử dụng số Pi với 8 chữ số thập phân có thể tính chu vi mọi đường tròn có bán kính nhỏ hơn bán kính Trái Đất với độ chính xác cực cao (sai số chỉ 1mm).



## SUDOKUBE

Nhìn vào Sudokube, khả năng bạn liên tưởng nó đến trò Sudoku là rất cao. Đó chính là lí do cho tên gọi của nó mặc dù nó chẳng liên quan một tí gì đến Sudoku, thế nên nó còn được gọi là Sudocube (cube nghĩa là khối) cho hợp lí hơn.

Không như khối Rubik thông thường, bạn đã biết trước mục tiêu nhằm đến là phải xếp mỗi mặt chỉ một màu, với Sudokube thì khác, mục tiêu của bạn là xếp sao cho các mặt chứa đủ các số từ 1 đến 9, chính vì thế, nó có nhiều phương án.

Bạn phải tính Toán, đưa ra mỗi bước đi thật cẩn thận mới có thể chinh phục trò chơi căng thẳng này!



## TÂM TỈ CỰ

Trong Toán học, cụ thể là Hình học, tâm tỉ cự là một khái niệm cơ bản và rất quan trọng. Thay vì hiểu bằng định nghĩa Toán học phức tạp, các bạn có thể thông qua khái niệm này như sau:

Với một cây thước thẳng thì tâm tỉ cự của nó là điểm chính giữa (trung điểm).  
Với một bề mặt tam giác thì tâm tỉ cự của nó là trọng tâm.  
Hình chữ nhật, hình vuông thì tâm tỉ cự của nó là giao điểm hai đường chéo.  
...

Có thể hiểu rằng tâm tỉ cự là điểm thẳng bằng - điểm mà tại đó nếu bạn đặt vật lên đầu kim hay cột đỡ thì vật ở vị trí thẳng bằng.

Tâm tỉ cự có nhiều ứng dụng trong vật lí, kiến trúc, xây dựng, thiết kế,...

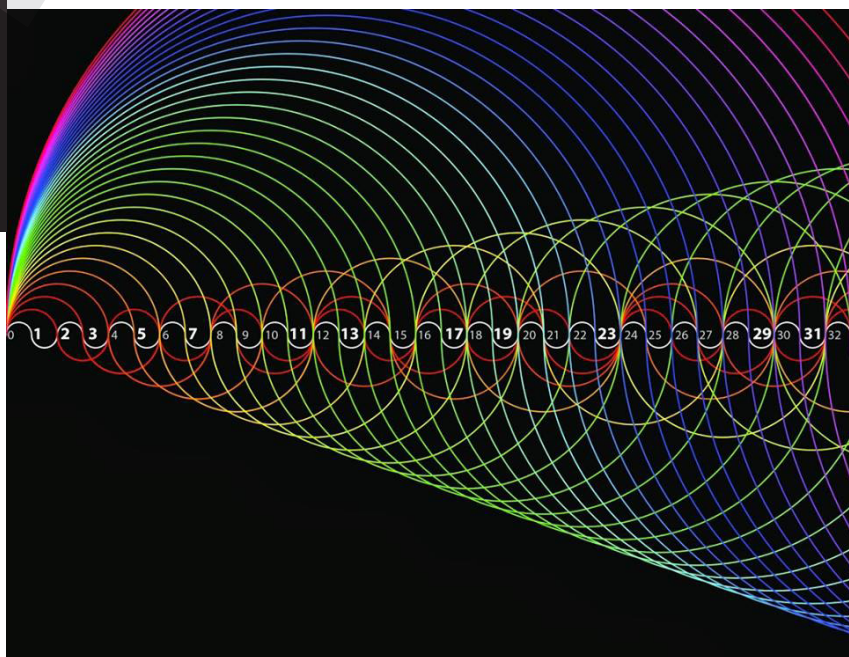
## BIỂU DIỄN SỐ NGUYÊN TỐ

Biểu diễn các số nguyên tố (là những số chỉ chia hết cho 1 và chính nó, trừ số 1) qua hình ảnh hoá (visualization) dựa trên phương pháp sàng lọc Eratosthenes (một thuật Toán cổ xưa để tìm ra các số nguyên tố).

Chúng ta bắt đầu từ số 0, vẽ một đường gợn sóng (dạng gần như hình sin) thứ nhất, màu trắng, đi qua tất cả các

con số (bội của 1).  
Tiếp đó vẽ đường gợn sóng thứ hai, màu đỏ, đi qua các bội của 2.  
Vẽ đường gợn sóng thứ ba, đi qua các bội của 3.  
Cứ như thế. ...

Kết quả cuối cùng sau khi thực hiện: những số được đi qua chỉ bởi hai đường gợn sóng chính là các số nguyên tố.



## NGHỊCH ĐẢO 998001

$$\frac{1}{998001} = 0.000\ 001\ 002\ 003\ 004\ 005\ 006\ 007\ 008\ 009\ 010\ 011\ 012\ 013\ 014\ 015\ 016\ 017\ 018\ 019\ 020\ 021\ 022\ 023\ 024\ 025\ 026\ 027\ 028\ 029\ 030\ 031\ 032\ 033\ 034\ 035\ 036\ 037\ 038\ 039\ 040\ 041\ 042\ 043\ 044\ 045\ 046\ 047\ 048\ 049\ 050\ 051\ 052\ 053\ 054\ 055\ 056\ 057\ 058\ 059\ 060\ 061\ 062\ 063\ 064\ 065\ 066\ 067\ 068\ 069\ 070\ 071\ 072\ 073\ 074\ 075\ 076\ 077\ 078\ 079\ 080\ 081\ 082\ 083\ 084\ 085\ 086\ 087\ 088\ 089\ 090\ 091\ 092\ 093\ 094\ 095\ 096\ 097\ 098\ 099\ 100\ 101\ 102\ 103\ 104\ 105\ 106\ 107\ 108\ 109\ 110\ 111\ 112\ 113\ 114\ 115\ 116\ 117\ 118\ 119\ 120\ 121\ 122\ 123\ 124\ 125\ 126\ 127\ 128\ 129\ 130\ 131\ 132\ 133\ 134\ 135\ 136\ 137\ 138\ 139\ 140\ 141\ 142\ 143\ 144\ 145\ 146\ 147\ 148\ 149\ 150\ 151\ 152\ 153\ 154\ 155\ 156\ 157\ 158\ 159\ 160\ 161\ 162\ 163\ 164\ 165\ 166\ 167\ 168\ 169\ 170\ 171\ 172\ 173\ 174\ 175\ 176\ 177\ 178\ 179\ 180\ 181\ 182\ 183\ 184\ 185\ 186\ 187\ 188\ 189\ 190\ 191\ 192\ 193\ 194\ 195\ 196\ 197\ 198\ 199\ 200\ 201\ 202\ 203\ 204\ 205\ 206\ 207\ 208\ 209\ 210\ 211\ 212\ 213\ 214\ 215\ 216\ 217\ 218\ 219\ 220\ 221\ 222\ 223\ 224\ 225\ 226\ 227\ 228\ 229\ 230\ 231\ 232\ 233\ 234\ 235\ 236\ 237\ 238\ 239\ 240\ 241\ 242\ 243\ 244\ 245\ 246\ 247\ 248\ 249\ 250\ 251\ 252\ 253\ 254\ 255\ 256\ 257\ 258\ 259\ 260\ 261\ 262\ 263\ 264\ 265\ 266\ 267\ 268\ 269\ 270\ 271\ 272\ 273\ 274\ 275\ 276\ 277\ 278\ 279\ 280\ 281\ 282\ 283\ 284\ 285\ 286\ 287\ 288\ 289\ 290\ 291\ 292\ 293\ 294\ 295\ 296\ 297\ 298\ 299\ 300\ 301\ 302\ 303\ 304\ 305\ 306\ 307\ 308\ 309\ 310\ 311\ 312\ 313\ 314\ 315\ 316\ 317\ 318\ 319\ 320\ 321\ 322\ 323\ 324\ 325\ 326\ 327\ 328\ 329\ 330\ 331\ 332\ 333\ 334\ 335\ 336\ 337\ 338\ 339\ 340\ 341\ 342\ 343\ 344\ 345\ 346\ 347\ 348\ 349\ 350\ 351\ 352\ 353\ 354\ 355\ 356\ 357\ 358\ 359\ 360\ 361\ 362\ 363\ 364\ 365\ 366\ 367\ 368\ 369\ 370\ 371\ 372\ 373\ 374\ 375\ 376\ 377\ 378\ 379\ 380\ 381\ 382\ 383\ 384\ 385\ 386\ 387\ 388\ 389\ 390\ 391\ 392\ 393\ 394\ 395\ 396\ 397\ 398\ 399\ 400\ 401\ 402\ 403\ 404\ 405\ 406\ 407\ 408\ 409\ 410\ 411\ 412\ 413\ 414\ 415\ 416\ 417\ 418\ 419\ 420\ 421\ 422\ 423\ 424\ 425\ 426\ 427\ 428\ 429\ 430\ 431\ 432\ 433\ 434\ 435\ 436\ 437\ 438\ 439\ 440\ 441\ 442\ 443\ 444\ 445\ 446\ 447\ 448\ 449\ 450\ 451\ 452\ 453\ 454\ 455\ 456\ 457\ 458\ 459\ 460\ 461\ 462\ 463\ 464\ 465\ 466\ 467\ 468\ 469\ 470\ 471\ 472\ 473\ 474\ 475\ 476\ 477\ 478\ 479\ 480\ 481\ 482\ 483\ 484\ 485\ 486\ 487\ 488\ 489\ 490\ 491\ 492\ 493\ 494\ 495\ 496\ 497\ 498\ 499\ 500\ 501\ 502\ 503\ 504\ 505\ 506\ 507\ 508\ 509\ 510\ 511\ 512\ 513\ 514\ 515\ 516\ 517\ 518\ 519\ 520\ 521\ 522\ 523\ 524\ 525\ 526\ 527\ 528\ 529\ 530\ 531\ 532\ 533\ 534\ 535\ 536\ 537\ 538\ 539\ 540\ 541\ 542\ 543\ 544\ 545\ 546\ 547\ 548\ 549\ 550\ 551\ 552\ 553\ 554\ 555\ 556\ 557\ 558\ 559\ 560\ 561\ 562\ 563\ 564\ 565\ 566\ 567\ 568\ 569\ 570\ 571\ 572\ 573\ 574\ 575\ 576\ 577\ 578\ 579\ 580\ 581\ 582\ 583\ 584\ 585\ 586\ 587\ 588\ 589\ 590\ 591\ 592\ 593\ 594\ 595\ 596\ 597\ 598\ 599\ 600\ 601\ 602\ 603\ 604\ 605\ 606\ 607\ 608\ 609\ 610\ 611\ 612\ 613\ 614\ 615\ 616\ 617\ 618\ 619\ 620\ 621\ 622\ 623\ 624\ 625\ 626\ 627\ 628\ 629\ 630\ 631\ 632\ 633\ 634\ 635\ 636\ 637\ 638\ 639\ 640\ 641\ 642\ 643\ 644\ 645\ 646\ 647\ 648\ 649\ 650\ 651\ 652\ 653\ 654\ 655\ 656\ 657\ 658\ 659\ 660\ 661\ 662\ 663\ 664\ 665\ 666\ 667\ 668\ 669\ 670\ 671\ 672\ 673\ 674\ 675\ 676\ 677\ 678\ 679\ 680\ 681\ 682\ 683\ 684\ 685\ 686\ 687\ 688\ 689\ 690\ 691\ 692\ 693\ 694\ 695\ 696\ 697\ 698\ 699\ 700\ 701\ 702\ 703\ 704\ 705\ 706\ 707\ 708\ 709\ 710\ 711\ 712\ 713\ 714\ 715\ 716\ 717\ 718\ 719\ 720\ 721\ 722\ 723\ 724\ 725\ 726\ 727\ 728\ 729\ 730\ 731\ 732\ 733\ 734\ 735\ 736\ 737\ 738\ 739\ 740\ 741\ 742\ 743\ 744\ 745\ 746\ 747\ 748\ 749\ 750\ 751\ 752\ 753\ 754\ 755\ 756\ 757\ 758\ 759\ 760\ 761\ 762\ 763\ 764\ 765\ 766\ 767\ 768\ 769\ 770\ 771\ 772\ 773\ 774\ 775\ 776\ 777\ 778\ 779\ 780\ 781\ 782\ 783\ 784\ 785\ 786\ 787\ 788\ 789\ 790\ 791\ 792\ 793\ 794\ 795\ 796\ 797\ 798\ 799\ 800\ 801\ 802\ 803\ 804\ 805\ 806\ 807\ 808\ 809\ 810\ 811\ 812\ 813\ 814\ 815\ 816\ 817\ 818\ 819\ 820\ 821\ 822\ 823\ 824\ 825\ 826\ 827\ 828\ 829\ 830\ 831\ 832\ 833\ 834\ 835\ 836\ 837\ 838\ 839\ 840\ 841\ 842\ 843\ 844\ 845\ 846\ 847\ 848\ 849\ 850\ 851\ 852\ 853\ 854\ 855\ 856\ 857\ 858\ 859\ 860\ 861\ 862\ 863\ 864\ 865\ 866\ 867\ 868\ 869\ 870\ 871\ 872\ 873\ 874\ 875\ 876\ 877\ 878\ 879\ 880\ 881\ 882\ 883\ 884\ 885\ 886\ 887\ 888\ 889\ 890\ 891\ 892\ 893\ 894\ 895\ 896\ 897\ 898\ 899\ 900\ 901\ 902\ 903\ 904\ 905\ 906\ 907\ 908\ 909\ 910\ 911\ 912\ 913\ 914\ 915\ 916\ 917\ 918\ 919\ 920\ 921\ 922\ 923\ 924\ 925\ 926\ 927\ 928\ 929\ 930\ 931\ 932\ 933\ 934\ 935\ 936\ 937\ 938\ 939\ 940\ 941\ 942\ 943\ 944\ 945\ 946\ 947\ 948\ 949\ 950\ 951\ 952\ 953\ 954\ 955\ 956\ 957\ 958\ 959\ 960\ 961\ 962\ 963\ 964\ 965\ 966\ 967\ 968\ 969\ 970\ 971\ 972\ 973\ 974\ 975\ 976\ 977\ 978\ 979\ 980\ 981\ 982\ 983\ 984\ 985\ 986\ 987\ 988\ 989\ 990\ 991\ 992\ 993\ 994\ 995\ 996\ 997\ 998\ 999\ 1000$$

### Con số này thú vị là bởi vì

1/998001 = 0.000 001 002 003 004 005 006 007 008 009 010 011 012 013 014 015 016...  
cứ như thế mãi nhưng...  
nó không cho bạn con số 998, có nghĩa là

0.000 001 002 003... 996 997 999...  
rồi lại quay trở lại như lúc đầu và cứ lặp lại mãi như thế đến vô tận  
0.000 001 002 003...997 999 000 001 002 003...

Nói cách khác, 1/998001 là số thập phân vô hạn tuần hoàn với chu kì 000 001 002...996 997 999  
1/998001 = 0.(000 001 002...996 997 999)  
Thật thú vị phải không các bạn?

### LỜI GIẢI THÍCH

Nếu bạn tính ý thì nhận thấy 998001 = 999².

Hãy xem xét các số sau:

1/9801 = 1/99² = 0.00 01 02 03 04 05 06 07...96 97 99 00 01 02 03 04 05 06 07...96 97 99...

(không có số 98)

1/81 = 1/9² = 0.012345679 012345679...

(không có số 8)

Điều tương tự cũng xảy ra với các số dạng 1/(99...9)².

Tại sao vậy?

Đến đây có lẽ phải dùng chuyên ngành một chút xiu mới giải thích được.

Trong Toán học, ta có khai triển sau:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, |x| < 1$$

Thay x = 1/10 thì vế trái là tổng các số:

1  
0.2  
0.03  
0.004  
0.0005  
0.00006  
0.000007  
0.0000008  
0.00000009 (\*)  
0.00000010 (\*\*)  
0.000000011  
0.000000012  
...

dễ dàng cộng chúng lại và kết quả sẽ là 1.2345679 12345679... Còn vế phải là 100/81.

Chia hai vế cho 100, thì ta được

$$1/81 = 1/9^2 = 0.012345679 012345679... \text{ (không có số 8)}$$

Đến đây thì “điều lạ” đã lộ rõ chân tướng. Sở dĩ không có số 8 là bởi ở chỗ (\*) và (\*\*) trên, các bạn thấy là 9 + 1 = 10, viết 0 nhớ 1 và 8 trở thành 9, hết nhớ, còn từ số 7 đổ lại không ảnh hưởng gì. Đó là lí do số 8 không hiện hiện trong 1/81.

Lí luận tương tự như vậy cho sự không có mặt của số 98 trong 1/998001 (cho x = 1/100).

# LUẬT BENFORD

## QUY TẮC THỨ VỊ NHẤT CỦA TOÁN HỌC.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

30.1, 17.6, 12.5, 9.7, 7.9, 6.7, 5.8, 5.1, 4.6

Luật Benford, còn được gọi là Luật Chữ số thứ nhất là một định luật thống kê do nhà vật lý, kỹ sư người Mỹ Frank Benford nghiên cứu và phát hiện ra.

Nội dung của luật Benford cho bạn biết rằng trong một thống kê thực tế về bất cứ điều gì trên đời này thì xác suất gặp các số bắt đầu bởi 1, 2, 3... 9 sẽ giảm dần theo đúng thứ tự đó.

(Trên ảnh là sự thể hiện tần suất đó)

Chính Benford cũng vô cùng kinh ngạc và không ngờ rằng kết quả lại có thể như vậy.

Lí do vì đâu mà đúng theo thứ tự 1 đến 9? Phải chăng đó là ý nghĩa thực sự của mỗi con số?

Năm 1961, khi nhà toán học người Mỹ Roger Pinkham xem xét lại vấn đề này, ông tin rằng có khả năng giải thích định luật. Ông phỏng đoán trên thực tế có một luật về “tần suất chữ số”, và gợi ý rằng luật này được áp dụng cho toàn vũ trụ, bất kể chữ số kia được biểu thị dưới dạng nào, dù là giá đồng đô la ở Drachma, hay đo bằng inch, bit lượng tử hay mét. Pinkham gọi đây là “tỉ lệ bất biến” trên toàn vũ trụ, và là người đầu tiên chỉ ra rằng luật Benford, thực tế là, tỉ lệ bất biến. Nếu có một quy luật nào về tần suất của các chữ số là một tỉ lệ bất biến, quy luật đó hẳn là luật Benford.

Đến đây, có thể bạn sẽ nghĩ ngay đến chuyện “từ nay mình sẽ mua xổ số bắt đầu bằng số 1”.

Thật đáng tiếc là luật Benford không đúng cho những gì không thực tế, tự nhiên, hoặc khi khi tập hợp các xác suất là quá hạn hẹp. Quả thật Chúa Trời biết cách trêu chọc con người!

Bạn không thể dùng nó để chọn ra kết quả xổ số, nhưng bạn có thể dùng luật Benford theo nhiều cách quan trọng khác.

Các nhà nghiên cứu dùng luật Benford để tìm ra các số liệu giả mạo trong kê khai thuế và dữ liệu tài chính (bản kê khai thuế của Bill Clinton được nghiên cứu bởi giáo sư kế toán Tiến sĩ Mark Nigrini, ông đã dùng luật này và, thật đáng ngạc nhiên, không có bất kỳ sự gian lận nào bị tìm thấy!), cũng như nhiều ứng dụng hữu dụng khác, như kiểm tra sự bất quy tắc trong các cuộc thử nghiệm thuốc hay xác thực các mô hình biểu đồ dữ liệu.

Vì thế nếu bạn muốn khai man thống kê nào đó? Hãy tuân thủ đúng theo luật Benford.

Nhưng Toán học kì thú không khuyến khích điều này nhé!







# PHẦN II: CÁC BÀI VIẾT DÀI

Kiến thức và sự điên loạn .....	56
Toán học đem lại lợi ích gì cho cá nhân bạn? .....	59
Fibonacci .....	60
Thuật Toán Doomsday.....	63
Ma phương.....	64
Bức họa Paradiso Canto 31 và hình dạng không gian nơi chúng ta sống.....	66

## Kiến thức và sự điên loạn



Cantor là một nhà Toán học lừng danh, là cha đẻ của Lý thuyết tập hợp – nền tảng của Toán học. Ông đã bắt đầu một cuộc cách mạng Toán học mà không hề biết trước, làm lung lay toàn bộ nền tảng của Toán học, một câu hỏi đơn giản: “Vô hạn lớn đến chừng nào?”. Cantor đã khám phá ra được, và ông cũng đã phải trả giá đắt cho câu trả lời của mình.

Cantor đã “nhìn thấy” gì để rồi cuối cùng ông đã phải chết cô đơn trong một nhà thương điên? Nếu tất cả những gì ông thấy là Toán học thì câu chuyện của ông sẽ ít được quan tâm. Nhưng ngay từ đầu, ông đã nhận ra được ý nghĩa lớn lao trong việc ông đang làm. Ông tin rằng nó sẽ tác động đến trí tuệ nhân loại, hướng đến chân lý và sự chắc chắn. Nhưng điều mà ông không bao giờ nghĩ đến là cuối cùng, Toán học của ông sẽ khiến tính chắc chắn trở nên khó nắm bắt, thậm chí là phá hủy khả năng đạt đến chân lý nữa.

Cantor là một người sùng đạo, nhưng tôn giáo của ông không như ai khác. Tôn giáo của ông chính là Toán học. Ngay từ nhỏ, ông cho là mình nghe thấy một giọng nói bí mật, kêu gọi ông đến với Toán học. Âm thanh mà ông nghe suốt cuộc đời, trong tâm trí ông, đó mới là Chúa Trời. Vì vậy, đối với ông, Toán học về cái Vô hạn của mình phải là đúng đắn, vì Chúa Trời – Vô hạn đích thực, đã mặc khải cho ông.

Nếu bạn nhìn vào công trình nghiên cứu cuối cùng của Cantor, Lý thuyết Tập hợp 1895, nó được bắt đầu bằng 3 câu cách ngôn mà câu thứ 3 được lấy từ Kinh thánh của người Corin, thuộc Hy Lạp cổ đại:

“Điều mà đến nay vẫn còn là bí ẩn đối với người, sẽ được đưa ra ánh sáng.”

Có lẽ ông nghĩ mình là Ngôn Sứ, rằng Lý thuyết này đã bị che giấu và nhiệm vụ của mình là đem nó đến với nhân loại. Với ông, niềm tin Tôn giáo và Khoa học là không có gì mâu thuẫn.

Hãy tưởng tượng một hình tròn mà từ tâm của nó, bạn vẽ ra nhiều đường thẳng hướng ra ngoài, bạn có thể vẽ vô số đường như thế, Vô hạn. Nhưng càng kéo dài ra, chúng càng phân kì, và khoảng trống giữa những đường thẳng lại càng lớn. Nếu là Vô hạn thì đáng ra nó phải lấp đầy chứ, tại sao lại có khoảng trống như vậy. Đó chính là ý tưởng của Galileo về tính Vô hạn, nhận thấy có gì đó không ổn, ông nói: “Chúng ta vẫn chưa hiểu được Vô cùng, Chúa biết nhưng chúng ta thì không. Vì vậy, nếu cần thiết, vẫn có thể sử dụng, nhưng đừng cố gắng hiểu rõ chúng”. Có lẽ Galileo đã thấy được sự nguy hiểm của Vô cùng.

Thế là vấn đề bị bỏ ngỏ, cho đến khi Cantor xuất hiện. Ông đã đạt được nhiều thành công, công bố nhiều bài báo về Vô cùng.

Ông biết rằng nếu nhìn vào trục số, giữa những số nguyên là phân số, giữa những phân số là số vô tỷ. Số nguyên thì vô hạn, nhưng nó bị bao lấy bởi những số thực, tức là vô cùng bao lấy vô cùng. Cantor đã khám phá ra điều đi ngược lại mọi trực giác, đó là có những Vô cùng lớn hơn những Vô cùng khác, thậm chí còn có sự phân cấp chúng. Hãy nghĩ sâu về điều này, bạn sẽ thấy như muốn điên lên vì không hiểu nổi.

Những gì Cantor đã làm khiến cho những nhà Toán học khác sợ hãi và chỉ trích ông.

Họ coi Toán học là một nền tảng vững chắc trong khi những gì Cantor đưa ra là quá mơ hồ, ngược cảm nhận, đầy rẫy những nghịch lí, . . . Tất cả những điều đó đe dọa đến sự chắc chắn của Toán học.

Nhà Toán học Henri Poincare đã nói: “Toán học của Cantor thật bệnh hoạn, nhưng sẽ có ngày nó được khôi phục lại”. Cần biết Henri Poincare là một trong những nhà Toán học tài ba nhất trong lịch sử nhân loại, ông còn thấy Vô cùng còn nguy hiểm, huống chi những ai khác. Tệ hại hơn, Kronecker, người bạn, người thầy của Cantor đã nói ông là “một tên trẻ tuổi thối nát”.

Cantor cảm thấy như mình đang gieo rắc bệnh dịch. Để được công nhận, ông cần phải hoàn thiện lý thuyết của mình, vấn đề mang tên “Giả thuyết Continuum” được ra đời từ đây. Liệu rằng không có tập nào có lực lượng nhiều hơn lực lượng của tập số tự nhiên mà nhỏ hơn lực lượng của tập số thực?

Dù bị cô lập, nhưng ông càng cố gắng. Ai đó có thể từ bỏ, riêng ông thì không.

Ông luôn giữ một bức thư của bố mình đã gửi cho ông từ nhỏ kỳ vọng ông sẽ đạt được thành công lớn như thế nào. Nếu không biết vượt qua nghịch cảnh và những lời chỉ trích, ông biết mình chỉ là kẻ thất bại.

Năm 1894, Cantor làm việc liên tục với “Giả thuyết Continuum” trong hơn 2 năm ròng. Khoảng thời gian này là lúc cuộc đời ông xuống dốc. Tháng 5 năm đó, ông suy sụp tinh thần nặng nề. Con gái ông mô tả ông đã thay đổi hoàn toàn tính cách, phóng đại lên mọi điều và phát cáu, suy sụp hoàn toàn rồi đi đến trầm cảm. Cuối cùng, ông bị đưa đến Nervenklunik, một nhà thương điên ở Halle. Ông rối loạn, la hét, chịu đựng những cơn đau thần kinh khủng khiếp, nổi điên, lúc tưởng tượng mình là vị vua quyền uy, khi thì mình bị ngược đãi, . . . Mặc dù vậy, ông vẫn không thể dứt tâm trí mình khỏi “Giả thuyết Continuum”.

Tháng 8-1894, ông viết thư cho người bạn cũng là đồng nghiệp, Mittag Leffler, người cuối cùng còn chịu xuất bản các bài viết của ông. Bức thư tràn ngập niềm hân hoan, “Tôi đã chứng minh được rồi, giả thuyết là hoàn toàn đúng”, và ông hứa sẽ gửi bản chứng minh trong vài tuần. Tuy nhiên, Leffler đã không bao giờ nhận được cả. 3 tháng sau, bức thư thứ hai được gửi, Cantor tỏ ra bối rối, “Tôi xin lỗi, lẽ ra tôi không nên vội là mình đã chứng minh được nó”, “lời giải đẹp đẽ của tôi tan hoang cả rồi”. Ba tuần sau, bức thư thứ ba được gửi đến, “Tôi đã chứng minh được giả thiết này là sai rồi”.

Chuyện này cứ tiếp tục lặp đi lặp lại nhiều lần, ông chứng minh rằng nó đúng, và rồi bác bỏ nó sai. Trên thực tế, điều Cantor đang làm càng kéo ông dẫn sâu hơn vào cơn điên của mình.

Năm 1899, Cantor quay lại làm tiếp tục làm việc với “Giả thuyết Continuum” của mình, khiến ông tái phát bệnh, quay lại nhà thương điên, cũng trong khoảng thời gian này, con trai Rudoft của ông đột ngột qua đời chỉ 4 ngày trước sinh nhật thứ 13.

Cantor mất ngày 6 tháng 1 năm 1918.

Công trình của Cantor ngày nay vẫn được công nhận nhưng đã bị cắt xén đi những nghiên cứu về Vô cùng. Tập hợp trong Toán học mà chúng ta đang được học ở cả chương trình phổ thông lẫn Cao cấp là công trình nền tảng của Cantor.



1. Học Toán đem lại cho bạn các kỹ năng tìm tòi

Trong quá trình học, thỉnh thoảng bạn sẽ lâm vào tình huống cố gắng hiểu được những bài Toán có vẻ quá khó và cố giải quyết những vấn đề mà thoát đầu tưởng chừng như không thể. Bạn có thể được giao viết những bài luận và những dự án khiến bạn phải tự mình tìm hiểu một phạm trù Toán học mà bạn chưa biết gì. Việc này sẽ biến bạn thành một nhà điều tra nghiệp dư, lần theo tiếng gọi của thông tin và nguồn cảm hứng. Bạn sẽ có những trải nghiệm:

- Tra cứu các ghi chép về bài giảng, giáo trình, cũng như sách tham khảo.
- Xối tung thư viện.
- Tìm kiếm các nguồn thông tin tham khảo.
- Rút tỉa thông tin từ mọi nhà Toán học mà bạn gặp (những sinh viên khác, sinh viên đã tốt nghiệp, người hướng dẫn và những giảng viên)
- Tư duy.

Đó là một trong những gì thiết yếu mà việc học Toán đem lại cho bạn.



2. Học Toán đem lại cho bạn những kỹ năng Phân tích

Một khi đã học tốt Toán, bạn sẽ không bao giờ chấp nhận việc lập luận hời hợt. Toán học mang lại cho bạn khả năng:

- Suy nghĩ mạch lạc.
- Lưu ý đến từng chi tiết.
- Làm chủ những ý tưởng chính xác và phức tạp.
- Lập luận phức tạp.
- Xây dựng những lý lẽ logic và chỉ ra những lý lẽ phi logic.

3. Các kỹ năng giải quyết vấn đề

Bạn sẽ được giao cho vô số những bài Toán để giải quyết trong suốt quá trình học.

Trải nghiệm này sẽ giúp bạn:

- Hệ thống một vấn đề bằng những lý lẽ chính xác, nhận dạng được những vấn đề then chốt.
- Trình bày một giải pháp cụ thể, đưa ra những giả định rõ ràng.
- Hiểu thấu một vấn đề khó bằng cách nhìn vào những trường hợp đặc biệt hoặc những vấn đề phụ.
  - Linh hoạt và tiếp cận cùng một vấn đề bằng nhiều quan điểm khác nhau.
  - Đối phó với vấn đề một cách tự tin, ngay cả khi chưa có giải pháp rõ ràng.
- Tìm kiếm sự giúp đỡ khi cần.

Giải quyết vấn đề là kỹ năng tuyệt vời nhất mà Toán học đem lại cho bạn.

4. Các kỹ năng trao đổi thông tin

Toán học sẽ phát triển cho bạn khả năng nắm bắt và trao đổi ở mức độ cao những thông tin chuyên môn. Trong quá trình nghe giảng, bạn sẽ được yêu cầu sắp xếp và lưu trữ một khối lượng lớn thông tin Toán học ở dạng nói cũng như viết.

Những bài tập về nhà, và bất cứ bài luận hay dự án nào mà bạn thực hiện, cũng sẽ đòi hỏi sự trình bày mạch lạc theo ngôn ngữ Toán học. Trong quá trình được kèm cặp, bạn sẽ tham gia trao đổi những ý kiến về Toán học với người giám sát của mình và những người học cùng khóa. Bạn còn tham gia thảo luận các vấn đề Toán học qua việc đối thoại. Qua những trải nghiệm này, bạn sẽ học được cách:

- Lắng nghe hiệu quả.
- Viết tốt các vấn đề Toán học.
- Viết luận và báo cáo.
- Thuyết trình một vấn đề Toán học trước cả nhóm.



# TOÁN HỌC ĐEM LẠI LỢI ÍCH GÌ CHO CÁ NHÂN BẠN?

CÂU TRẢ LỜI LÀ RẤT RẤT NHIỀU

5. Những thói quen làm việc tốt

Để học Toán học tốt, bạn sẽ phải:

- Tỉ mỉ và chịu khó trong công việc.
- Tổ chức tốt thời gian biểu và đúng hạn.
- Làm việc dưới áp lực, đặc biệt là khoảng thời gian gần kỳ thi.
- Làm việc độc lập mà không cần giáo viên hỗ trợ thường xuyên.
- Hợp tác với những sinh viên khác để giải quyết các vấn đề chung.

6. Những nét tính cách hữu ích

Một giáo sư Toán học từng nói với mỗi lứa sinh viên sắp vào năm nhất rằng Toán học sẽ thay đổi họ suốt cả cuộc đời. Vật lộn thành công với những ý tưởng khó hiểu và các vấn đề khó giải quyết sẽ tạo nên:

- Tính quả quyết.
- Tính kiên trì.
- Tính sáng tạo.
- Sự tự tin.
- Tính thận trọng trong tư duy.



KẾT LUẬN

Rất nhiều người trong số chúng ta luôn thắc mắc rằng: Học Toán để làm cái gì?, Những phương trình, bất đẳng thức, tại sao lại phải tìm hiểu chúng? Cần gì phải học đạo hàm, tích phân, thực tế có bao giờ dùng đến chúng đâu?....

Thật ra, mọi thứ Toán học đều có một ứng dụng nhất định. Bạn sẽ học cơ bản ở phổ thông và chuyên ngành hơn ở Đại học. Nói cụ thể ra thì cả ngày cũng không nói hết được. Cách duy nhất là các bạn phải tự trải nghiệm lấy qua thời gian.

Mà quan trọng gì cho câu hỏi Tại sao phải học Toán??. Qua sự phân tích về 5 lợi ích của Toán học cho cá nhân, hẳn các bạn cũng thấy được rằng tất cả 5 lợi ích đó đều rất thiết thực. Tạm gạt qua tính thực tế của Toán học thì đó mới chính là những gì cốt lõi mà qua việc học Toán, bạn sẽ lĩnh hội được.





# FIBONACCI

FIBONACCI LÀ MỘT DÃY SỐ QUEN THUỘC TRONG TOÁN HỌC, NÓ RẤT ĐƠN GIẢN NHƯNG ĐẦY TÍNH TẾ

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711,...

Ngoại trừ hai số hạng đầu thì mỗi số hạng là tổng của hai số ngay trước nó.

## 1. Dây số Fibonacci trong tự nhiên

Dây Fibonacci xuất hiện ở khắp nơi trong thiên nhiên. Chẳng hạn, những chiếc lá trên một cành cây mọc cách nhau những khoảng tương ứng với dãy số Fibonacci.

Các số Fibonacci cũng xuất hiện trong các bông hoa hướng dương. Những nụ nhỏ sẽ kết thành hạt ở đầu bông hoa hướng dương được xếp thành hai tập các đường xoắn ốc: một tập cuộn theo chiều kim đồng hồ, còn tập kia cuộn ngược theo chiều kim đồng hồ. Số các đường xoắn ốc hướng thuận chiều kim đồng hồ thường là 34 còn ngược chiều kim đồng hồ là 55. Đôi khi các số này là 55 và 89, và thậm chí là 89 và 144. Tất cả các số này đều là các số Fibonacci kết tiếp nhau.

Các số Fibonacci xuất hiện trong những bông hoa. Hầu hết các bông hoa có số cánh hoa là một trong các số: 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 hoặc 89. Hoa loa kèn có 3 cánh, hoa mao lương vàng có 5 cánh, hoa phi yến thường có 8 cánh, hoa vạn cúc thọ có 13 cánh, hoa cúc tây có 21 cánh, hoa cúc thường có 34, hoặc 55 hoặc 89 cánh.

Nếu quan sát các ‘mắt’ trên vỏ của một trái thơm già, bạn có thể may mắn tìm thấy được số mắt trên 2 đường vòng cung chéo trên vỏ trái thơm là 2 số Fibonacci nào đó, thí dụ 13 và 21.

Dây Fibonacci thể hiện rất nhiều trong tự nhiên. Tuy nhiên hình dáng thể hiện của nó lại thường là những đường cong xoắn ốc.

Chúng có vẻ như chuyển động theo chiều xoắn ốc ra bên ngoài theo cả hai hướng bên trái và bên phải. Đây là số Fibonacci của những đường xoắn ốc. Đường như sự sắp xếp này giúp cho cấu trúc được thống nhất với nhau, không ảnh hưởng đến vị trí của phần trung tâm.

Chẳng hạn như trong ảnh theo thứ tự

- Hạt bồ công anh
- Móng vuốt của một con mèo.
- Sóng biển.
- Móng vuốt của chó, chó sói và mèo, sư tử.
- Hoa hướng dương.
- Thiên hà xoắn ốc.
- Cấu trúc DNA.
- Súp lơ.



## 2. Vì sao đường cong xoắn ốc lại đẹp?

Có lẽ các bạn sẽ phải thắc mắc, đặt ra câu hỏi vì sao dãy số Fibonacci trong tự nhiên lại thể hiện ra những đường cong xoắn ốc?

Câu trả lời hợp lí được thể hiện trong bức ảnh.

Đầu tiên, các bạn vẽ một hình vuông ABCD cạnh 1 đơn vị độ dài, rồi từ đó, đặt compa lần lượt lấy tâm là B, C, D, A vẽ các cung tròn, và cứ tiếp tục như thế, các bạn có thể vẽ mãi không ngừng. Đường xoắn ốc ngày càng lớn ra.

Điểm đặc biệt là từ cung tròn thứ 3 trở đi, mỗi cung tròn có bán kính bằng tổng hai bán kính của hai cung tròn ngay trước nó. Điều đó khiến cho dãy bán kính có đặc điểm như là dãy số Fibonacci.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

Có lẽ giờ các bạn cũng đã hiểu vì sao đường cong xoắn ốc lại được thiên nhiên ưu ái đến như vậy.

Một số hình ảnh khác thể hiện đường cong xoắn ốc Fibonacci.



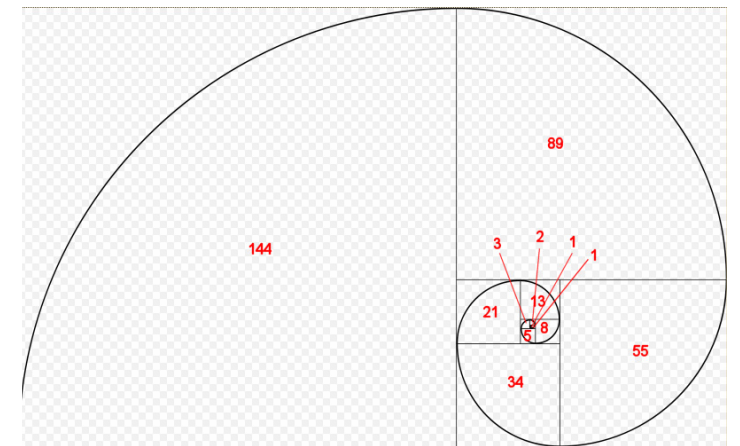
## 4. Fibonacci, tỷ lệ vàng và iPhone

Apple biết rõ rằng việc áp dụng “tỉ lệ thần thánh” vào việc thiết kế sản phẩm của mình đủ sức để đánh bại bất cứ đối thủ nào khác.

Không phải ngẫu nhiên mà kiểu dáng iPhone lại như thế, không chỉ đơn giản như là thiết kế trang phục, Apple đã vận dụng được khoa học và Toán học ở rất nhiều mặt.

Tỉ lệ vàng được tìm thấy ở chỗ sắp xếp vị trí jack tai nghe, anten sóng, micro phụ và camera-đèn flash

Quả không hổ danh là công ty giá trị nhất thế giới!



## 3. Fibonacci và tỷ lệ vàng

Tỉ lệ vàng, còn số vàng hay tỉ lệ thần thánh là một phát minh rất quan trọng và đã có từ lâu đời. Hai đại lượng được gọi là có tỷ lệ vàng nếu tỷ số giữa tổng của các đại lượng đó với đại lượng lớn hơn bằng tỷ số giữa đại lượng lớn hơn với đại lượng nhỏ hơn”. Tỉ lệ vàng được ký hiệu bằng ký tự “phi” và bằng 1,618033... (chính xác là căn bậc hai của 5 cộng 1 rồi chia đôi), hoặc nghịch đảo của nó (1 chia cho 1,618033), đó là một số vô tỷ, tức là phần sau dấu phẩy kéo dài mãi không dứt.

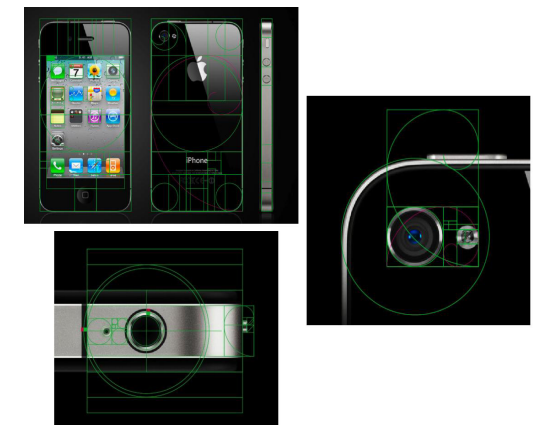
Tỉ lệ vàng được phát minh ra từ khi nào thì không ai biết chính xác, chỉ biết rằng nó đã tồn tại cách đây hàng ngàn năm và ứng dụng của nó vô cùng rộng lớn. Các kiến trúc kinh điển như đền thờ Parthenon; kim tự tháp Cheops hay khuôn mặt nàng Mona Lisa cũng được vẽ theo tỉ lệ vàng...

Tỉ lệ vàng được diễn tả theo một hình chữ nhật vàng.

Một điều lý thú và bất ngờ là tỷ số giữa hai số liên tiếp nhau của dãy Fibonacci ngày càng tiến đến số tỷ lệ vàng là và số nghịch đảo của nó là 0.618 (1 chia cho 1.618).

Các tỷ số đó là : 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21, 21/34, 34/55, 55/89, 89/144, càng ngày càng tiến về tỉ lệ vàng.

Người ta cho rằng một người phụ nữ có dáng đẹp lý tưởng là người có tỷ lệ số đo các vòng (vòng 1, 2, 3) là tỷ lệ vàng.







## PHẦN I: SƠ LƯỢC

### I. GIỚI THIỆU:

Câu hỏi trên hẳn nhiều bạn cũng thắc mắc lắm, hoặc cũng có lần nghĩ thoáng qua. Có một cách đó là dò lịch (không tính), hoặc là lấy điện thoại di động ra dò, cũng được đấy nhưng nó chỉ tính được trong phạm vi hữu hạn thời, chẳng hạn xa nhất chỉ tới năm 1960. Đến lúc này, bạn cách một cách khác. Và đó chính là thuật Toán Doomsday.

Thuật Toán Doomsday là một phương pháp được phát minh vào những năm 1970 bởi tiến sĩ John Horton Conway, một nhà toán học nổi tiếng. Đây được coi là phương pháp đơn giản và dễ nhớ nhất so với các cách thức khác.

### II. DOOMSADAY CỦA MỘT NĂM LÀ GÌ?

Mọi thuật Toán tính thứ của một ngày đều phải biết được thứ của một ngày nào đó trong năm. Từ đó suy ra thứ những ngày còn lại trong tuần.

Trước tiên, bạn cần biết về khái niệm Doomsday. Doomsday của một năm là ngày cuối cùng của tháng hai, tức là ngày 28/2 năm thường và 29/2 năm nhuận. Ví dụ như Doomsday của năm 2004 (năm nhuận) là chủ nhật 29/2.

Khi biết được Doomsday, bạn sẽ tính được thứ của các ngày khác trong tháng hai bằng cách lấy Doomsday làm mốc và tính ngược lại từng tuần. Chẳng hạn như để biết ngày 14/2/2004 là thứ mấy, bạn làm như sau:  $29 - 7 = 22$ ,  $22 - 7 = 15$ , ngày 22/2 và 15/2 đều là chủ nhật, như vậy 14/2 là thứ bảy.

### III. CÁCH TÍNH

Như vậy, cách tính thứ các ngày của tháng hai đã được giải quyết. Còn các tháng còn lại thì sao?

#### 3.1. Cách tính đối với những tháng chẵn:

Trước tiên, chúng ta nói về những tháng chẵn: các tháng 4, 6, 8, 10, 12. Đối với các tháng chẵn này, các ngày sau sẽ có thứ trùng với Doomsday: 4/4, 6/6, 8/8, 10/10, 12/12. Thú vị và trùng hợp. Thật sự dễ nhớ! Trong năm 2004, các ngày trên đều là chủ nhật (trùng với thứ của ngày 29/2). Áp dụng cách tính giống tháng hai, bạn sẽ tính được thứ của bất cứ ngày nào trong các tháng chẵn.

#### 3.2 Cách tính đối với những tháng lẻ:

Cách tính cũng tương tự như trên. Trước hết chúng ta xét các tháng 5, 7, 9, 11. Các ngày 9/5, 5/9, 11/7, 7/11 sẽ có thứ trùng với Doomsday. Không khó nhớ!

Còn với tháng 3? Doomsday (28/2 hoặc 29/2) có thể coi là ngày 0/3. Vì vậy ngày 7/3 sẽ có thứ trùng với Doomsday.

Tháng 1 thì hơi đặc biệt. Với năm thường, ngày 31/1 sẽ có thứ trùng với Doomsday (28 ngày sau ngày 31/1 là ngày 28/2 chính là Doomsday). Với năm nhuận, Doomsday là ngày 29/2 nên ngày 1/2 (coi như là ngày 32/1) có thứ trùng với Doomsday, do vậy ngày 31/1 có thứ trước Doomsday một ngày. Bạn cần chú ý điểm đặc biệt này để tính cho chính xác.

Sau khi đọc cách tính trong tháng một của tiến sĩ Conway, một độc giả tên Bob Goddard đã đề nghị một ngày khác dễ nhớ hơn đối với tháng một. Đó là ngày 3/1 trong năm thường và ngày 4/1 trong năm nhuận. Các ngày này có thứ trùng với Doomsday. Để dễ nhớ, ta liên tưởng số 3 là 3 năm thường trong chu kỳ 4 năm có năm nhuận, còn số 4 gợi ý đến năm nhuận vì năm nhuận chia hết cho 4.

Vấn đề tiếp theo, làm sao để biết Doomsday của một năm bất kì? Vì từ Doomsday, thứ của mọi ngày trong năm sẽ được tính ra.



Giả sử bạn muốn tính thứ của ngày có dạng sau:  
Dd/mm/ABCD

- Bước 1:  
Tìm Doomsday năm đầu thế kỉ (tra bảng), chẳng hạn là thứ X.
- Bước 2:  
Tính Doomsday của năm ABCD (năm nhuận khi  $2C + D$  chia hết cho 4)  
Lấy CD chia 12 được a dư b, b chia 4 được c.  
Tính tổng  $a + b + c = d$  chia 7 dư e.  
Như vậy, Doomsday của năm ABCD là +e đối với thứ X.
- Bước 3:  
Lúc này, ta đã biết Doomsday. Từ đó
- Biết thứ tháng chẵn (Doomsday 28 hay 29/2 trùng 4/4, 6/6, 8/8, 10/10, 12/12)
  - Biết thứ tháng 1 (Doomsday trùng 3/1 năm thường, 4/1 năm nhuận)
  - Biết thứ tháng 3 (Doomsday trùng 7/3)
  - Biết thứ tháng lẻ còn lại (Doomsday trùng 9/5, 5/9, 7/11, 11/7)

## THUẬT TOÁN DOOMSDAY

ĐỂ BIẾT THỨ CỦA MỘT NGÀY BẤT KÌ NÀO ĐÓ, BẠN LÀM NHƯ THẾ NÀO?

## PHẦN II: TRUY VẾT DOOMSDAY

Doomsday của năm 2004 là chủ nhật 29/2, vậy Doomsday của năm 2003 là thứ mấy? Chính là thứ sáu. Bởi vì 2004 là năm nhuận 366 ngày, 366 chia 7 dư 2, vì vậy Doomsday của năm 2003 phải lùi hai ngày nên là thứ sáu. Tương tự, Doomsday của năm 2002 là thứ năm vì 2003 là năm thường 365 ngày, 365 chia 7 dư 1. Như vậy, Doomsday của một năm trước năm thường lùi 1 ngày, Doomsday của một năm trước năm nhuận lùi 2 ngày. Áp dụng cách này, biết Doomsday của một năm nào đó, ta tính được Doomsday của những trước đó.

Có một bảng liệt kê chi tiết Doomsday của những năm trong thế kỷ 20. Chúng ta sinh ra và sống trong thế kỷ 20 nên bảng này sẽ được dùng nhiều. Nhưng thật khó để mà nhớ thuộc lòng hết bảng. Không vấn đề gì, có một cách tính khác giúp bạn biết được Doomsday của từng năm trong thế kỷ 20.

Trước hết bạn cần nhớ Doomsday của năm 1900 là thứ tư. Cứ 4 năm thì có một năm nhuận, vì vậy Doomsday mỗi 4 năm cách nhau 5 ngày. Tương tự, Doomsday mỗi 8 năm cách nhau 10 ngày, hay là 3 ngày, Doomsday mỗi 12 năm cách nhau 15 ngày, hay là 1 ngày. Ta sẽ ghi nhớ chu kỳ 12 năm này (tiện lợi vì con số chênh lệch chỉ là 1). Chẳng hạn như ta tính được Doomsday của năm 1914 là thứ bảy, bởi vì Doomsday của năm 1900 là thứ tư nên Doomsday của năm 1912 (12 năm sau) là thứ năm nên Doomsday của năm 1914 là thứ bảy.

Đối với một năm bất kỳ trong thế kỷ 20 (19xy), bạn tính Doomsday theo quy tắc sau:

- a là thương của phép chia xy cho 12

- b là số dư của phép chia xy cho 12
- c là thương của phép chia b cho 4 (biết số năm nhuận để tính số ngày cộng thêm)
- $d = a + b + c$
- e là số dư phép chia d cho 7
- Doomsday của năm 19xy sẽ có thứ sau Doomsday của năm 1900 (thứ tư) e ngày, tức là cộng thêm e ngày.

Ví dụ: Doomsday của năm 1929 là thứ mấy?

Trả lời:  
 $a = 29 \div 12 = 2$   
 $b = 29 \bmod 12 = 5$   
 $c = b \div 4 = 5 \div 4 = 1$   
 $d = a + b + c = 2 + 5 + 1 = 8$   
 $e = d \bmod 7 = 8 \bmod 7 = 1$ . Sau thứ tư 1 ngày là thứ năm.

Đối với những thế kỷ khác, cách tính Doomsday cũng tương tự như đối với thế kỷ 20. Vấn đề ở đây là bạn cần biết Doomsday của năm đầu tiên của thế kỷ. Bảng bên cung cấp cho bạn Doomsday của năm đầu của một số thế kỷ. Để nhớ bảng này cũng không quá khó.

Doomsday của năm đầu trong một số thế kỷ:

CN	T2	T3	T4	T5	T6	T7
1700	1600	1500				
2100	2000	1900	1800			
2500	2400	2300	2200			

Bài Toán tính thứ của một ngày đến đây được giải quyết. Mong các bạn không thấy quá khó. Chỉ là một vài phép tính nhẩm đơn giản thôi.



# MA PHƯƠNG

## 1. Nguồn gốc, lạc thư

Sau đây, ad sẽ nói sơ qua về cái gọi là Ma phượng, như là nguồn gốc, khái niệm, những con người cũng như những câu chuyện xung quanh Ma phượng. Nói chung là phổ thông. Còn nếu muốn biết chi tiết hơn, kĩ càng hơn, như là về cách tạo Ma phượng, thuật Toán các bạn tham khảo Google, nhiều lắm.

Sinh viên Đại học nếu học đến Toán cao cấp thì đã biết đến ma trận, còn các bạn học sinh và những người khác thì chỉ biết rằng Ma trận là một bộ phim rất nổi tiếng do tài tử Keanu Reeves đóng vai chính. Nhưng đối với Ma phương thì không phải ai cũng biết, rất hiếm.

Truyền thuyết kể rằng, vào thời Đại Vũ (2205-2197 TCN), khi vua đi thuyền trên sông Lạc (một nhánh sông Hoàng Hà), có một con rùa lớn nổi lên, mai rùa có các chấm đen, trắng: các cụm chấm đen là các số chẵn 2, 4, 6, 8, các cụm chấm trắng là các số lẻ 1, 3, 5, 7, 9. Vua thấy lạ nên cho ghi rồi sắp xếp lại và gọi là “Lạc thư” hay “Quy thư”.

Lạc thư có 9 ô, điền bởi các số từ 1 đến 9. Người Trung Hoa còn gọi là “Phương trận”, sau này gọi là “Cửu cung Toàn”. Về sau, Lạc thư phát triển rất nhanh, trở thành một ô vuông ngang dọc bậc  $n$  ( $n$  hàng ngang,  $n$  cột dọc), gọi là “Tung-Hoàn đồ”. Đó là một hình vuông gồm  $n \times n$  số nguyên khác nhau và được sắp xếp sao cho tổng các số của một hàng ngang, dọc, chéo đều bằng nhau và gọi là “hằng số biến đối” hay “hằng số ma thuật”. Hơn thế nữa, tung-hoàn đồ còn có các tính chất kỳ lạ không ngờ tới.

Thế kỉ XV, tung-hoàn đồ du nhập vào Châu Âu và được gọi là “Ma phươg”, “Hình vuôg kì ảo”,... Tại đây, nhiều người đã nghiêg cứu Ma phươg và thu được nhiều kết quả.

Tóm lại, Ma phương hay hình vuông ma thuật là một hình vuông có cạnh bằng  $n$ , trong đó gồm  $n \times n$  ô vuông nhỏ, mỗi ô vuông nhỏ được điền một trong các số từ 1 đến  $n^2$ , mỗi số điền một lần sao cho tổng các số trên các hàng, các cột và hai đường chéo bằng nhau.

Người xưa coi Ma phương như là một ô số có ma thuật, Ma phương gắn với nhiều điều huyền bí, nhiều bí mật chưa được giải đáp. Nó còn được đề cập qua quyển sách Biểu tượng thất truyền (The Lost Symbol), là tập thứ 3 sau quyển Mật mã Da Vinci (Da Vinci code), Thiên thần và Ác quỷ (Angels and Demons) của Dan Brown.



## 2. Melencolia I

Albrecht Duerer, còn được viết là Albrecht Durer; 21/5/1471 Nurnberg, Đức – 6/4/1528 Nurnberg) là một họa sĩ, một nhà đồ họa và một lý thuyết gia về nghệ thuật nổi tiếng ở châu Âu. Durer là một nhà nghệ thuật lớn trong thời kỳ của Chủ nghĩa nhân đạo (Humanism) và Phong trào Cải cách.

Bức *Melencolia I* của Albrecht Durer diễn tả một nhân vật với đôi cánh lớn đang tư thế suy ngẫm, ngồi đằng trước một tòa nhà bằng đá, xung quanh là cả đống tạp nham những đồ vật kì lạ: chiếc cân đĩa, con chó gầy gò xương, dụng cụ thợ mộc, đồng hồ cát, vài khối đá góc cạnh, một cái chuông, một tiểu thiên thần, một thanh kiếm và một cái thang. Nhân vật có cánh là thể hiện cho con người thiên tài - một nhà tư tưởng vĩ đại tay chống cằm, vẻ rất phiền muộn không thể đạt tới sự khai sáng. Xung quanh thiên tài là tất cả những biểu tượng cho khả năng hiểu biết: nào là khoa học, triết học, tự nhiên, hình học và thậm chí là nghề mộc,... nhưng vẫn không thể leo lên chiếc thang để đạt tới sự khai sáng đích thực. Thậm chí con người thiên tài cũng gặp khó khăn trong việc lĩnh hội những Bí mật cổ xưa. Về mặt biểu tượng, tác phẩm này biểu hiện nỗ lực bất thành của nhân loại trong việc biến đổi tri thức con người thành sức mạnh thần thánh. Theo thuật ngữ giả kim thì nó thể hiện sự bất lực của chúng ta trong việc biến chì thành vàng.

-Trích The Lost Symbol

Thế mới biết rằng người xưa coi trọng kiến thức đến mức nào. Họ còn có thể coi đó là sức mạnh huyền bí, càng đạt đến trình độ thông tuệ, càng gần đến mức độ thần thánh.

Chẳng qua là vì ma thuật là khoa học chưa thể lí giải được.

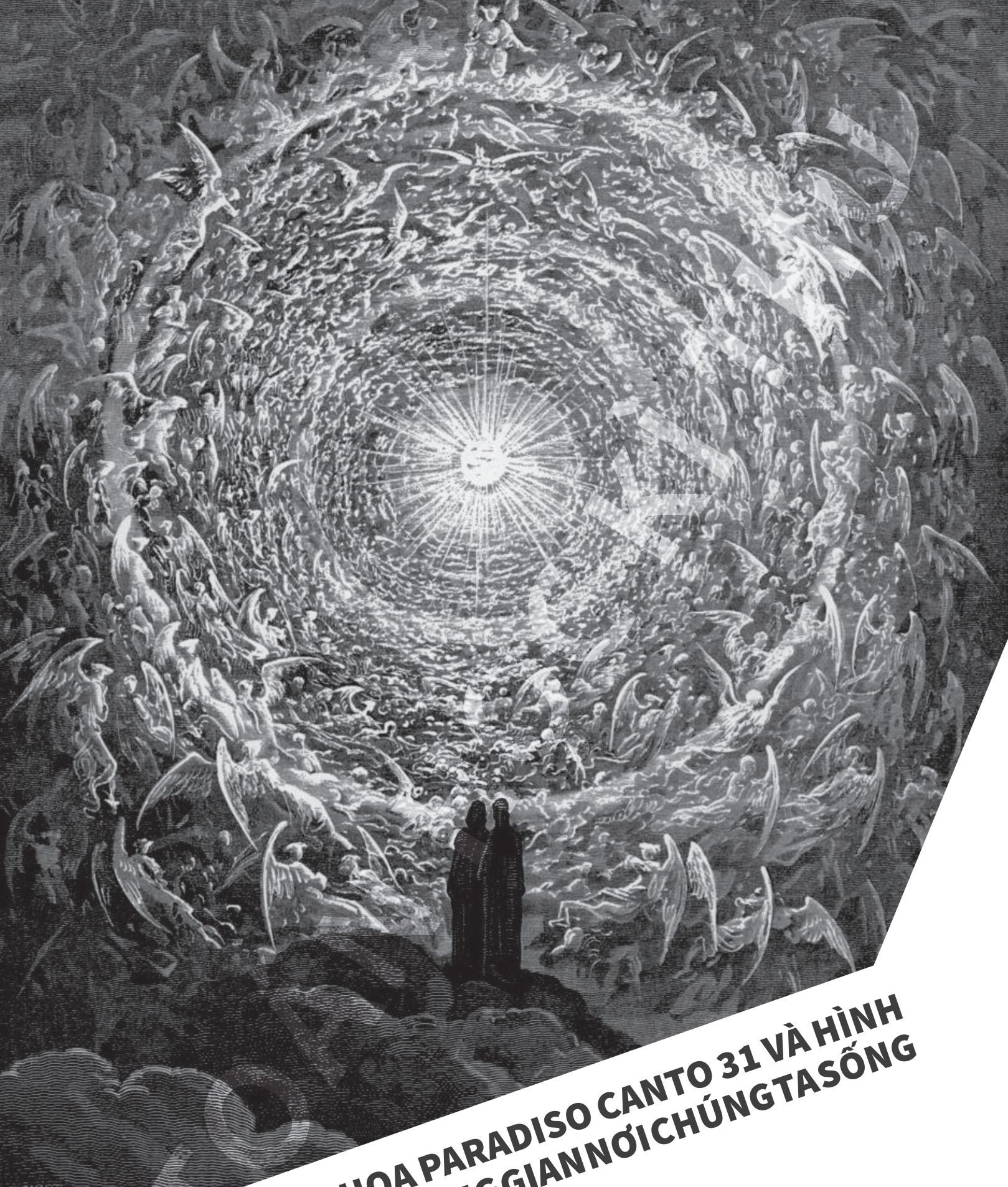
Ma phương giả kim thuật Melencolia I của Durer có lẽ là một trong các ma phương nổi tiếng nhất ở phương Tây.

Tổng các hàng ngang, dọc, chéo, tổng các khối  $2 \times 2$  ở bốn góc cũng đều là 34. Ngoài ra, tổng số ở hình vuông ở giữa ( $10+11+6+7$ ), tổng số 4 góc trong bất kì hình vuông  $3 \times 3$  hay  $4 \times 4$  nào chứa trong đó, tổng các số biên theo chiều quay đồng hồ ( $3+8+14+9$  và  $2+12+15+5$ ), tổng đối xứng đường chéo ( $2+8+9+15$  và  $3+5+12+14$ ), tổng đối xứng bia ( $5+9+8+12$  và  $3+2+15+14$ ), tổng chữ thập thánh giá ( $3+5+11+15$ ,  $2+10+8+14$ ,  $3+9+7+15$ ,  $2+6+12+14$ ) cũng đều là 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1







## BỨC HỌA PARADISO CANTO 31 VÀ HÌNH DẠNG KHÔNG GIẢN NƠI CHÚNG TA SỐNG

### 1. Khối cầu bậc ba

Ai trong chúng ta cũng đều biết, đường tròn là tập hợp những điểm trên một mặt phẳng cách đều một điểm cho trước, điểm đó gọi là tâm. Hình tròn là tập hợp những điểm trên đường tròn và những điểm bên trong đường tròn.

Mặt cầu là tập hợp những điểm trong không gian cách đều một điểm cho trước, điểm đó gọi là tâm. Khối cầu (hình cầu) là tập hợp những điểm trên mặt cầu và những điểm bên trong mặt cầu.

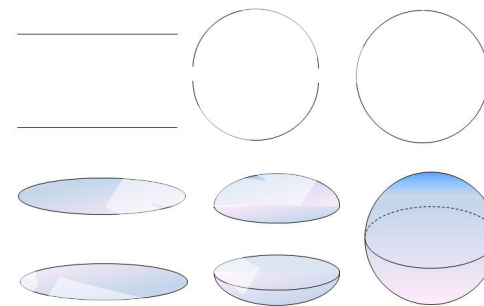
Mặt cầu là một đối tượng hình học đối xứng hoàn hảo. Trong Toán học, thuật ngữ này là bề mặt hay biên của một hình cầu.

Như vậy, không gian 2 chiều có hình tròn, không gian 3 chiều có khối cầu. Thế không gian 4 chiều có gì? Lúc này, ta tạm sử dụng từ “khối cầu bậc ba”.

Tương tự, khối cầu bậc ba là khối cầu trong không gian 4 chiều, là tập hợp các điểm cách đều một điểm gọi là tâm.

Các bạn có thể hình dung như sau:

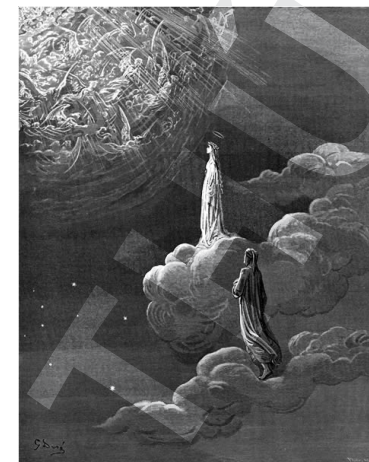
- Hình tròn tạo bởi hai đường thẳng bẻ cong rồi nối chúng lại.
- Khối cầu được tạo bởi hai đĩa phẳng bẻ cong rồi nối phần biên chung (vòng tròn) của chúng.
- Như vậy, trong trường hợp của khối cầu bậc ba, các bán cầu không còn là những đĩa hai chiều có biên, mà phải là hai quả cầu đặc, có biên chung, và biên chung đó không còn là một vòng tròn nữa, mà là một mặt cầu hai chiều.



Phần biên có số chiều nhỏ hơn số chiều của không gian là 1.

Đến đây, sự thú vị xuất hiện, bạn có thể tưởng tượng được biên mà lại là một không gian không? Thường biên chỉ là một đường, một mặt thôi mà (biên giới chẳng hạn). Biên là phần ngăn cách mà tại đó, bạn không thể đi tiếp nữa.

Hãy thử nhắm mắt và tưởng tượng! Cảm nhận lối tư duy đầy tinh tế này. Ý tưởng đây rất đơn giản nhưng bước đầu đã giúp nhân loại định hình được hình dạng vũ trụ.



### 2. Paradiso

Một số học giả đã lập luận một cách thuyết phục rằng vũ trụ tưởng tượng trong “Thần khúc” của nhà thơ, nhà văn vĩ đại người Ý Dante Alighierin (1261-1321) là một khối cầu bậc ba, tất nhiên là ông không gọi nó như thế.

Trong khúc Thiên đường (Paradiso), ông trèo lên từ địa ngục ở tâm Trái đất, tới bề mặt, xuyên qua các lớp vỏ đồng tâm nơi chứa các hành tinh khác, vượt xa vỏ cầu trên cùng có chứa các ngôi sao cố định để tiến đến tầng Thiên đường thứ 9 hay còn gọi là Primum Mobile. Trên đỉnh của Primum Mobile, cùng với tình yêu của mình - Beatrice, ông nhìn xuống nửa vũ trụ mà ông đã vượt qua, và nhìn lên nửa vũ trụ của Thiên đường-gồm các lớp vỏ hình cầu đồng tâm mà trên đó các thiên sứ, các tổng thiên sứ và các bậc thiên thần cao hơn nữa sinh sống.

Mặt cầu hai chiều trên rìa của lớp vỏ hình cầu Primum Mobile là mặt cầu xích đạo mà từ đó ông và Beatrice quan sát toàn bộ vũ trụ. Trái đất (và địa ngục ở trung tâm) nằm ở một cực. Cực kia là lãnh địa của các Seraphim (các thiên thần có phẩm hàm cao nhất, hoặc thân gần nhất với Đức Chúa).



# PHẦN III: CÁC NGHỊCH LÝ TOÁN HỌC

Nghịch lý Petersburg.....	70
“Nghịch lý” hai chiếc phong bì .....	71
Phương trình Drake & Nghịch lý Fermi .....	72
Nghịch lý Zenon .....	74
Nghịch lý Dã tràng cát .....	76
Nghịch lý Khách sạn Vô hạn.....	79



# NGHỊCH LÝ PETERSBURG

Vào thế kỉ XVIII, St. Petersburg là thủ đô nước Nga, nơi qui tụ nhiều nhà toán học nổi tiếng, trong đó có hai nhà Toán học Nicholas và Daniel Bernoulli. Trong lúc làm việc, hai ông đã khám phá ra được một vấn đề liên quan đến xác suất và chuỗi vô hạn, mà sau này thường được gọi là “Nghịch lý Petersburg” (St. Petersburg Paradox).

Nhà Toán học cùng thời Jean Le Rond d’Alembert cho rằng Nghịch lý Petersburg là một chuyện động trời (scandal) và phải có một cái gì đó sai về xác suất mới tạo được một nghịch lý như vậy!

Một dạng đơn giản của Nghịch lý Petersburg có thể được thấy qua trò chơi với luật chơi phía dưới.

Câu hỏi đặt ra là trò chơi của lão già nghịch lý ở đâu? Bản chất trò chơi là như thế nào? Liệu những gì lão già nói có hợp lí?

Bạn có đoán ra được nghịch lý là ở đâu không?

Bạn sẽ tham gia vào một trò chơi tung đồng xu của một lão già.

Tiền chơi của mỗi lần tung đồng xu là 0.5 đồng (= 50 xu).

Số lần tung đồng xu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tiền chơi	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
Tiền thưởng	1	2	4	8	16	32	64	128	512	1024

Bảng tiền chơi, tiền thưởng ứng với số lần tung đồng xu.

Như vậy, nếu mặt ngửa xuất hiện ở lần thứ  $n$  thì tiền thưởng sẽ là  $2^{n-1}$

Để chứng minh trò chơi này hoàn toàn công bằng cho đôi bên, chỉ phụ thuộc yếu tố may rủi nơi bạn, lão giải thích cho bạn như thế này:

**Nếu bạn chỉ muốn tung đồng xu 1 lần**, bạn phải bỏ ra 0.5 đồng để chơi. Nếu mặt Ngửa xuất hiện, bạn được 1 đồng tiền thưởng, vậy là bạn lời 0.5 đồng! Nếu mặt Sấp xuất hiện, bạn mất 0.5 đồng. Xác suất thắng thua, được mất là 50:50.

**Nếu bạn muốn tung 2 lần**, bạn bỏ ra 1 đồng để chơi, các trường hợp có thể xảy ra như sau:

Lần tung thứ nhất:

Ngửa-----Tiền thưởng: 1đ-----Ngưng, huề      Sấp-----Tiếp tục tung

Lần tung thứ hai:

Ngửa-----Tiền thưởng: 2đ-----Ngưng, lời 1đ      Sấp-----Ngưng, lỗ 1đ

Xác suất huề 50%, thắng thua 25:25.

Lão già còn đưa ra những giải thưởng hấp dẫn như: **nếu bạn chỉ bỏ ra 5 đồng, bạn sẽ được 10 lần tung đồng xu, nếu mặt Ngửa xuất hiện ở lần tung thứ 9 thì tiền thưởng là 512 đồng, còn ở lần tung thứ 10, thì tiền thưởng lên đến 1,024 đồng!**

**Nếu bạn muốn tung 3 lần**, bạn bỏ ra 1.5 đồng để chơi, các trường hợp có thể xảy ra như sau:

Lần tung thứ nhất:

Ngửa-----Tiền thưởng: 1đ-----Ngưng, lỗ 0.5đ      Sấp-----Tiếp tục tung

Lần tung thứ hai:

Ngửa-----Tiền thưởng: 2đ-----Ngưng, lời 0.5đ      Sấp-----Tiếp tục tung

Lần tung thứ ba:

Ngửa-----Tiền thưởng: 4đ-----Ngưng, lời 2.5đ      Sấp-----Ngưng, lỗ 1.5đ

....

Khả năng huề thì gần như 50%, lời lỗ gần như nhau, nhưng tiền lời lại rất nhiều so với tiền lỗ. Chơi càng nhiều càng lời.

Chà!!! Vậy thì lí do gì mà bạn lại không tham chú???

# “NGHỊCH LÝ” HAI CHIẾC PHONG BÌ

CÓ ĐÚNG LÀ NGHỊCH LÝ?

Trò chơi gồm hai người chơi, mỗi người bí mật cho tiền (khác 0) vào phong bì của mình. Sau đó, họ sẽ so sánh số tiền bên trong, người thắng là người có số tiền ít hơn và được lấy số tiền trong phong bì của người kia, còn người thua nhận lại số tiền trong phong bì của người thắng. Trường hợp số tiền bằng nhau thì là hòa. Người thua phải nhận số tiền nhỏ hơn số tiền mà mình bỏ ra, tức là họ mất tiền.

Nghịch lý thể hiện như sau: Người chơi phải bỏ ra một số tiền  $x$ , nếu thắng sẽ lấy được số tiền của đối phương lớn hơn  $x$ . Như vậy, trò chơi này có vẻ lợi cho mình. Hiển nhiên đối phương cũng nghĩ thế. Đây là trò chơi đối xứng khá công bằng.

Giả sử bạn được mời tham gia trò chơi này. Bạn cho vào phong bì số tiền  $x$  và bạn chưa biết số tiền trong phong bì của người kia. Bạn

băn khoăn là có nên chơi hay không? Giả sử là bạn rất giàu nên tiền bạc không phải là vấn đề quan trọng, bạn chỉ muốn tìm một cơ sở lý luận nào đó cho quyết định của mình.

Đây là một bài Toán khó. Nghịch lý vì một mặt bạn có thể tìm thấy một lời giải mà bạn cho là đúng, nhưng mặt khác, bạn lại thấy lời giải đó lại mâu thuẫn với chính nó!

Cụ thể như sau, gọi  $A$  là phong bì của bạn,  $B$  là phong bì của người kia. Nếu bạn chọn phong bì  $B$ , tức là bạn tham gia chơi. Nếu bạn chọn phong bì  $A$ , tức là bạn hủy cuộc chơi.

Có 2 trường hợp cho số tiền trong phong bì  $B$ : số tiền này có thể là  $ax$  hay  $x/a$  ( $a \geq 1$ ). Cách đặt như thế là sự thể hiện số tiền nhiều hơn hay ít hơn  $x$ . Xác suất để phong bì  $B$  có  $ax$  hay  $x/a$  là bằng nhau và bằng  $1/2$  (50:50).

Do đó, số tiền dự đoán trong phong bì  $B$  là:

$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)x \geq x$$

Như vậy bạn nên nhận phong bì  $B$ , tức là tham gia cuộc chơi.

Thế nhưng... nếu ngay từ đầu gọi số tiền trong phong bì  $B$  là  $x$  thì sao?

Cũng bằng cách lý luận như trên, bây giờ bạn lại thấy là nên nhận phong bì  $A$ ! Rõ ràng, hai kết quả trên mâu

thuẫn nhau. Đó là lý do mà người ta gán nghịch lý cho bài toán hai phong bì.

Bạn có nghĩ đây là một nghịch lý thực sự không? Nếu không thì tại sao? Có gì không ổn trong cách lý luận trên? Đây là một vấn đề khá thú vị, mời các bạn tự suy ngẫm.



# PHƯƠNG TRÌNH DRAKE & NGHỊCH LÝ FERMI

MỘT TRONG NHỮNG CÂU HỎI LỚN NHẤT CỦA NHÂN LOẠI ĐÓ LÀ LIỆU CÓ MỘT NỀN VĂN MINH NÀO KHÁC ĐAU ĐÓ NGOÀI VŨ TRỤ?

Thật khó mà hình dung được xã hội của một nền văn minh ngoài hành tinh là như thế nào?

- Khoa học kĩ thuật.
- Chế độ xã hội, sự lãnh đạo, giai cấp.
- Văn hóa, ngôn ngữ.

Nhưng chúng ta hiểu được các lý do một nền văn minh sau cùng cũng phải tìm cách đến hành tinh của một nền văn minh khác, đó là:

- Khám phá tìm hiểu (exploration).
- Thôn tính (colonization).
- Sinh tồn (survival).

Sinh tồn là lý do quan trọng nhất, vì đó là bản năng tự nhiên của mọi loài trong vũ trụ. Tuổi thọ của các ngôi sao đều có giới hạn, khi đó nó sẽ biến thành một lỗ đen và có thể sẽ hút mất một hành tinh có sự sống văn minh gần đó. Lúc này, sự di cư của họ đến một hành tinh khác phù hợp với điều kiện sống của mình là một vấn đề ắt phải xảy ra. Bất cứ nền văn minh nào, sớm hay muộn, cũng sẽ phải đối đầu với bài Toán sinh tồn.

Theo những số liệu lịch sử mà Drake đã dùng năm 1962:

$R^* = 10/\text{year}$ ,  $f_p = 0.5$ ,  $n_e = 2$ ,  $f_i = 1$ ,  
 $f_c = 0.01$ ,  $f_c = 0.01$ ,  $L = 10,000$  năm  
thì có  $N = 10$  nền văn minh trong ngân hà mà chúng ta đang sống. Kết quả này có vẻ đúng theo suy nghĩ của Fermi là có nhiều nền văn minh trong ngân hà.

Nhưng, theo những số liệu hiện nay:  
 $R^* = 6/\text{year}$ ,  $f_p = 0.5$ ,  $n_e = 2$ ,  $f_i = 0.33$ ,  
 $f_i = 10^{-7}$ ,  $f_c = 0.01$  và  $L = 420$  năm  
thì có  $N = 0.0000008$  nền văn minh trong ngân hà mà chúng ta đang sống. Kết quả này, quá nhỏ so với kết quả của Drake. Nếu lấy trị số  $f_i = 0.01$  của Drake, thì  $N = 0.08$ .

Như vậy, dù gì đi chăng nữa, kết quả không phải là số 0 tròn trịa, tức là phải có một nền văn minh nào đó khác ngoài Trái đất ra.

Bạn có thể cho nghịch lý Fermi cũng như phương trình Drake là chuyện viễn vông! Ăn cơm dưới đất bàn chuyện trên trời! Nhưng xin bạn đừng cười, vì đó là động lực của những khám phá làm nền tảng cho nền văn minh địa cầu. Đừng tự biến mình thành một kẻ không hiểu biết gì. Tri thức là vô biên, sự tìm hiểu khám phá là không có giới hạn, nó luôn đi lên và phát triển. Ngày nay, nó đã vươn xa ở tầm mức vũ trụ, điều mà các thế hệ trước đây nghĩ chỉ là viễn tưởng.



## NGHỊCH LÝ FERMI

Năm 1940, trong một buổi ăn trưa, một nhóm khoa học gia nguyên tử, trong đó có nhà Vật lý-Toán học Enrico Fermi, vui miệng bàn luận đến đời sống ngoài Trái đất. Ý của Fermi là: *Nếu có cả hàng triệu hành tinh trong vũ trụ có sự sống, và cả triệu sinh vật có trí tuệ ở đó, thì tại sao họ lại không viếng thăm Trái đất?* Fermi nêu câu hỏi: “Họ ở đâu?” Ý kiến đó của Fermi về sau được biết đến như là “Nghịch lý Fermi”.

Cần biết rằng số hành tinh trong vũ trụ mà ta quan sát được là vào khoảng  $7 \times 10^{22}$ . Không có lí gì mà chỉ duy nhất Trái đất là nơi có sự sống.

Chúng ta, người Trái đất, sinh vật có trí tuệ, luôn khao khát tìm kiếm sự sống ngoài hành tinh. Điều này giúp chúng ta mở mang trí thức, một cuộc cách mạng về trí tuệ. Vậy tại sao những sinh vật có trí tuệ khác lại không làm điều đó?

Những lời giải cho nghịch lý Fermi có thể chia làm những loại sau đây:

### 1) Họ (Người ngoài địa cầu) đang ở đây.

- Họ đã ở đây và đã để lại những bằng chứng như đĩa bay hay UFO (unidentified flying object), những di tích lạ không thể giải thích được.
- Họ là chính chúng ta! Con người địa cầu là hậu duệ của những người từ các nền văn minh cổ ngoài địa cầu.
- Họ ở đây và đang bao vây chúng ta, cắt đứt mọi liên lạc với bên ngoài.

### 2) Họ có, nhưng chưa tiếp xúc được với người Trái đất.

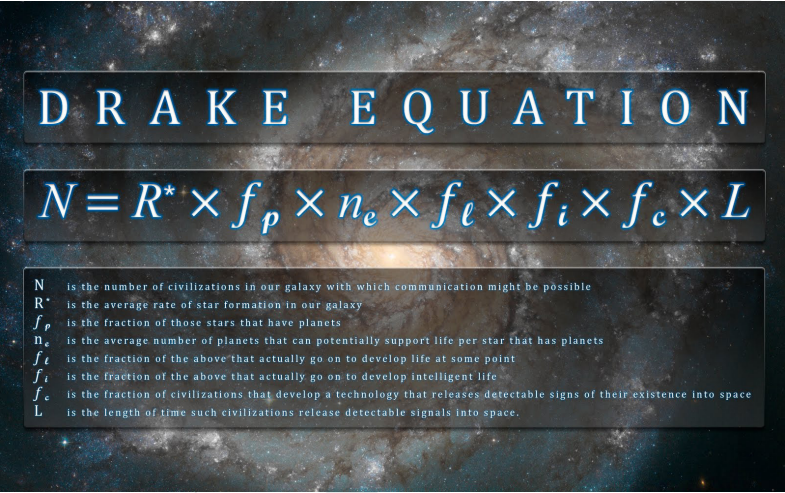
- Họ không có đủ thời gian để đến Trái đất. Những tin nhắn của họ có thể chưa đến được chúng ta.
- Họ đang báo hiệu với chúng ta, nhưng chúng ta không biết cách để nghe. Có thể họ sử dụng những kỹ thuật mà người Trái đất chưa biết tới.

### 3) Họ không muốn tiếp xúc với người Trái đất.

- Họ không thích nói chuyện với những người thấp kém hơn.
- Họ có một lý thuyết Toán học riêng khác với lý thuyết Toán học ở địa cầu.
- Thiên tai. Mỗi nền văn minh chỉ có thể kéo dài trong một thời gian rồi cũng phải diệt vong.

### 4) Họ không tồn tại (lí do khó chấp nhận nhất).

- Chúng ta là sinh vật đầu tiên trong ngân hà!
- Hành tinh có đủ những điều kiện cho sự sống rất hiếm.
  - Những hệ thống hành tinh rất hiếm có trong ngân hà.
  - Những vùng có thể ở được, có nước, thì hẹp.
  - Ngân hà là một chỗ nguy hiểm đầy những tia gamma, những hành tinh nhỏ (asteroid), ...
  - Hệ thống Trái đất và Mặt trăng là duy nhất, mực nước lên xuống rất cần thiết cho sự tiến hóa của các phân tử.
- Đời sống là hiếm có.
  - Hiếm có căn nguyên của đời sống.
  - Hiếm có Trí thông minh / Tài năng.
  - Chỉ con người là có tiếng nói.
  - Kỹ thuật / Khoa học không thể thiếu cho đời sống.



Một câu hỏi lại phải đặt ra là: Có phải trong vũ trụ, chỉ có Trái đất là nơi tồn tại sự sống văn minh? Nhà thiên văn học Frank Drake đã tìm cách trả lời câu hỏi đó vào năm 1961 trong một phương trình mang tên ông:

## PHƯƠNG TRÌNH DRAKE

$$N=R^* \times f_p \times n_e \times f_l \times f_i \times f_c \times L$$

trong đó:

- N: số nền văn minh trong ngân hà.
- $R^*$ : tốc độ hình thành các sao trong ngân hà.
- $f_p$ : tỉ số các sao là một hành tinh.
- $n_e$ : số trung bình của những hành tinh có điều kiện sống.
- $f_l$ : tỉ số các hành tinh đang phát triển sự sống.
- $f_i$ : tỉ số các hành tinh đang phát triển sự sống văn minh.
- $f_c$ : tỉ số các hành tinh muốn và có khả năng giao tiếp ngoài vũ trụ.
- L: tuổi của một nền văn minh.



# NGHỊCH LÍ ZENON

NGHỊCH LÍ CỔ ĐIỂN CỦA TOÁN HỌC

Giả sử bạn giương cung bắn nhắm đến mục tiêu. Giả sử luôn rằng bạn là một thiện xạ bách phát bách trúng.

Mũi tên để đi đến đích thì trước hết nó phải đi qua trung điểm  $I_1$  (điểm chính giữa) của quãng đường từ A đến B. Để tiếp tục quãng đường, nhất thiết mũi tên phải qua trung điểm  $I_2$  của đoạn  $I_1$  đến B.

.....

Cứ như vậy, mũi tên liên tiếp đi qua các trung điểm của các đoạn đường, mà giữa hai điểm thì luôn tồn tại điểm chính giữa.

Như vậy, có thể nói rằng mũi tên không bao giờ đi được đến nơi. Và trên thực tế mà nói thì càng gần đến đích, mũi tên càng ở trạng thái lơ lửng, đứng yên trên không.

Hiển nhiên ai trong chúng ta cũng biết là không thể có chuyện vô lí như thế được.

Vậy các bạn giải thích như thế nào cho nghịch lí này?

Tôi sẽ giải thích nghịch lí Zenon bằng ngôn từ phổ thông và đơn giản nhất có thể, mong các bạn sẽ hiểu.

Nếu ta coi quãng đường mà mũi tên phải đi chuyển là 1 đơn vị độ dài thì khi đó:

- Đến  $I_1$ , nó đi được  $1/2$  quãng đường.
- Đến  $I_2$ , nó đi được thêm  $1/2$  của  $1/2$  quãng đường nữa, tức là  $1/4$ .
- Đến  $I_3$ , nó đi được thêm  $1/2$  của  $1/2$  của  $1/2$  quãng đường nữa, tức là  $1/8$ .

...

- Đến  $I_n$ , nó đi được  $1/2^n$  quãng đường.

...

Và cứ tiếp tục như vậy, không chấm dứt.

Lúc này thì ta được tổng

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n + \dots$$

Một số bạn cho rằng tổng này cho giá trị vô hạn, là vì nó là tổng của vô hạn số dương. Nhưng nếu vậy thì vô lí, bởi trên thực tế, mũi tên sẽ phải đi một con đường dài vô hạn (!).

Nhưng nếu tổng này mà bằng 1 thì so với thực tế, điều này hoàn toàn chính xác, vì mũi tên chỉ phải đi chuyển 1 đơn vị độ dài thôi mà.

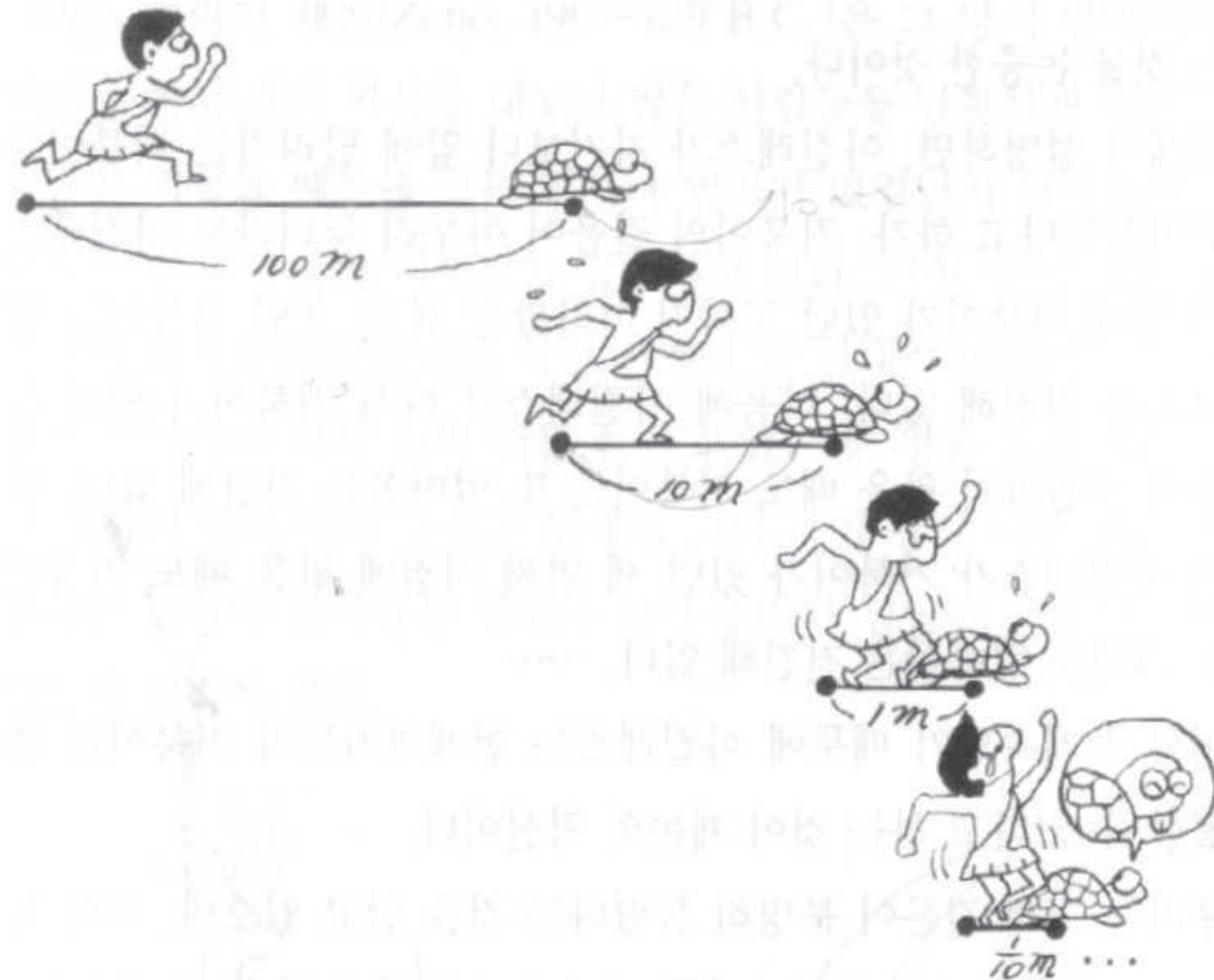
Tại sao lại điều này lại có thể? Tổng vô hạn nhưng kết quả lại hữu hạn? Vì mặc dù là tổng hữu hạn nhưng các số hạng trong tổng ngày càng nhỏ lại.

Học sinh lớp 11 có thể giải thích được bằng tổng cấp số nhân lùi vô hạn. Sinh viên Đại học một số ngành được học kĩ hơn về tổng vô hạn, gọi là Chuỗi số.

Nghịch lí Zenon tác động sâu sắc đến tư tưởng, Triết học và sinh ra những khái niệm Toán học mới, đưa cuộc sống trở nên tiến bộ hơn.

Có một biến thể khác của nghịch lí Zenon là việc ăn một chiếc bánh kem, hôm nay ta ăn một nửa, ngày mai ta lại ăn một nửa của một nửa còn lại,... cứ như vậy, ngày này qua ngày khác, ta chỉ ăn một nửa của những gì còn lại. Kết quả là sẽ không bao giờ ăn hết chiếc bánh kem đó, bởi do lúc nào mà chẳng có một nửa còn sót lại.  
==> Bánh vô hạn.

Chuyện chiếc bánh kem thì nghịch lí Zenon nói đúng, bạn sẽ không thể ăn hết nó nếu ăn đúng kiểu như đã nói, bởi lẽ có ngày nó sẽ mốc meo cả ra, ăn không được nữa.



Một ảnh minh họa khác của Nghịch lí Zenon  
Asin đuổi rùa





## NGHỊCH LÍ ĐẮNG TOÀN NĂNG

Nếu Chúa tồn tại, liệu Người có thể tạo ra một tảng đá nặng đến mức chính Người cũng không nhấc lên được?

Chắc là có, bởi vì một vị thần toàn năng có thể làm bất cứ điều gì, vậy rõ ràng Người có sức mạnh để nâng bất cứ hòn đá nào. Nhưng cũng chính vì sự toàn năng của mình, Người cũng phải có sức mạnh để tạo ra một thứ đủ nặng mà chính Người cũng sẽ không nhấc lên được. Nói một cách tổng quát, nếu Chúa có quyền năng làm được mọi điều thì trong đó cũng bao gồm cả việc ngăn chặn chính những điều Ngài sẽ làm.

Nhưng nếu Chúa làm được điều đó, thì Người tất nhiên đã bị hạn chế và không phải Đấng toàn năng. Còn nếu Người không làm được thì rõ ràng Người cũng chẳng toàn năng gì.

Chúng ta có thể giải thích về nghịch lý này như thế nào? Không ít các nhà Toán học, Triết học, Khoa học bận tâm về nó. Một số người vì nó mà không còn tin vào Chúa nữa, bởi vì nó khá mạnh mẽ để chứng minh Chúa hay bất cứ Đấng toàn năng nào không tồn tại.

Lời giải thích như sau:

Thoảng qua, nghịch lý có vẻ rất hấp dẫn và có lý ở cái nhìn đầu tiên, tức là phủ nhận sự tồn tại của Chúa. Tuy vậy, vấn đề then chốt chính là ở Chúa và chúng ta cần phải làm rõ thế nào là “toàn năng”?

Triết học hiểu “toàn năng” theo nhiều cách khác nhau.

Nhà Toán học René Descartes cho rằng “toàn năng” nghĩa là có khả năng làm được bất cứ điều gì. Theo ông, logic của Chúa hoạt động một cách khả thi lẫn bất khả thi, Chúa có thể tạo một “hình tròn vuông” hay có thể định nghĩa  $2 + 2 = 5$ .

Triết gia, nhà Thần học, Linh mục Tiến sỹ Hội thánh Thomas Aquinas thì có một quan điểm có vẻ hẹp hơn về “toàn năng”. Theo Aquinas, Chúa có thể làm bất cứ điều gì, Người có thể biến đại dương thành màu đỏ, có thể hồi sinh người chết nhưng Người không thể vi phạm luật logic và Toán học theo cách mà Descartes nghĩ là có thể.

Nếu quan điểm của Descartes là đúng thì mọi nỗ lực sử dụng logic để bác bỏ sự tồn tại của Chúa là vô vọng. Nếu Chúa có thể biến logic hoạt động theo bất cứ cách nào thì Người có thể tạo ra một tảng đá đủ nặng mà Người có thể nâng được lẫn không nâng được. Như vậy, Chúa có thể làm được mọi thứ. Đó hiển nhiên là một mâu thuẫn, nhưng thế thì sao chứ? Vì Chúa toàn năng (theo cách hiểu mà ta đang bàn) có thể làm mâu thuẫn trở thành chân lý. Cách hiểu của Descartes về “toàn năng” theo trên vì thế mà không tác động gì đến Nghịch lý tảng đá. Descartes có thể trả lời “Có” cho sự tồn tại tảng đá bất khả đó mà chẳng ảnh hưởng gì đến toàn năng của Chúa.

Còn với quan niệm của Aquinas, phổ biến hơn quan niệm của Descartes, là cũng thừa nhận sự tồn tại nghịch lý tảng đá. Vì nếu Chúa tồn tại thì Người có thể nâng mọi tảng đá. Còn tảng đá mà Người không thể nâng được là một vật thể bất khả, không tồn tại. Theo quan điểm của Aquinas, Chúa có thể làm bất cứ điều gì nhưng vẫn phải tuân thủ logic, còn những gì không thể, phi logic, như tạo ra tảng đá mà Chúa không nâng được là không thể nào.



Aquinas có thể trả lời “Không” cho sự tồn tại tảng đá bất khả nhưng không ảnh hưởng gì đến toàn năng của Chúa.

Với cả hai quan điểm toàn năng thì Nghịch lý tảng đá, như thế, đã được giải quyết, nó không cho thấy một mâu thuẫn nào trong quan điểm hữu thần của Thiên Chúa.

Tóm lại, chúng ta vẫn không (có thể là không bao giờ) chứng minh hay bác bỏ được sự tồn tại của Chúa.





## NGHỊCH LÍ

Thập niên 20 của thế kỷ XX, nhà toán học người Đức David Hilbert đã nghĩ ra một câu chuyện nổi tiếng cho thấy khái niệm vô cực khó hiểu đến mức nào.

Hãy tưởng tượng một khách sạn với số phòng vô hạn và một quản lý ca đêm cần mẫn. Một đêm nọ, khi tất cả các phòng ở Khách sạn Vô hạn đều đã đầy, một người đàn ông bước vào, hỏi thuê một phòng. Không muốn làm khách thất vọng, người quản lý đã quyết định xếp phòng cho ông ấy. Nhưng làm thế nào? Đơn giản thôi. Ông ta yêu cầu khách ở phòng số 1 chuyển sang phòng số 2, khách ở phòng số 2 chuyển sang phòng số 3, ... cứ thế. Bởi khách sạn có số phòng vô hạn, tất cả các khách trong khách sạn đều có phòng. Nhờ thế, ông khách mới có được một phòng. Quy trình này được lặp đi lặp lại cho bất kỳ số khách hữu hạn nào.

Giả sử một xe buýt chở 40 người đến thuê phòng, mỗi khách trong khách sạn sẽ phải chuyển từ phòng số  $n$  sang phòng số  $n+40$ , và nhờ vậy, 40 phòng đầu tiên sẽ còn trống. Nhưng giả sử, một xe buýt lớn vô hạn chở một số khách vô hạn (đếm được) đến khách sạn này

để thuê phòng. (Đếm được là yếu tố then chốt). Ban đầu, chiếc xe buýt với số khách vô hạn làm người quản lý bối rối, nhưng ông nhận ra có một cách để xếp phòng cho họ. Ông yêu cầu khách phòng số 1 chuyển sang phòng số 2. Rồi yêu cầu khách ở phòng số 2 chuyển sang phòng số 4, khách ở phòng số 3 chuyển sang phòng số 6,.... Mỗi khách trong khách sạn chuyển từ phòng số  $n$  sang phòng số  $2n$ , và vì thế, chỉ các phòng chẵn là có khách ở. Bằng cách này, người quản lý đã dọn trống các phòng lẻ, và khách mới có thể thuê những phòng lẻ đó.

Mọi người đều vui vẻ, và lợi nhuận của khách sạn tăng cao hơn bao giờ hết. Thực ra thì, lợi nhuận không thay đổi, bởi đêm nào khách sạn cũng thu về số tiền vô hạn. Mọi người bàn tán về khách sạn phi thường này. Họ đổ xô đến đây thuê phòng.

Một đêm, điều không tưởng xảy đến. Người quản lý nhìn ra bên ngoài và thấy một hàng xe buýt lớn vô hạn, dài vô hạn. Mỗi xe có một số khách vô hạn. Làm gì bây giờ? Nếu không xếp được phòng cho tất cả bọn họ, khách sạn sẽ thất thoát một số tiền lớn vô hạn, chắc chắn, ông ta sẽ mất việc.

## KHÁCH SẠN VÔ HẠN

May mắn thay, ông nhớ ra vào khoảng năm 300 TCN, Euclid đã chứng minh rằng số số nguyên tố là vô tận. Để hoàn thành nhiệm vụ tưởng như không thể này: tìm số giường vô hạn cho số khách vô hạn trên số xe buýt vô hạn, người quản lý đưa cho mỗi khách trong khách sạn số nguyên tố đầu tiên: 2 với số mũ là số phòng mà họ đang ở. Như vậy, người khách ở căn phòng số 7 sẽ chuyển đến phòng số  $2^7 = 128$ . Người quản lý đưa tất cả khách trên chiếc xe buýt lớn vô hạn đầu tiên số nguyên tố tiếp theo: 3 với số mũ là số ghế của họ trên xe buýt. Như vậy, khách ngồi ghế số 7 trên chiếc xe đầu tiên nhận phòng số  $3^7 = 2187$ . Người quản lý tiếp tục xếp phòng. Khách trên xe thứ hai được đưa cho số nguyên tố tiếp theo: 5 với số mũ là số ghế của họ trên xe. Tương tự là số 7 với khách trên xe thứ ba. Tiếp tục với số 11, số 13, số 17,... Bởi vì mỗi số này chỉ có thể chia hết cho 1 và chính nó, không có khách nào phải thuê chung phòng cả.

Tất cả các khách xuống xe buýt, vào khách sạn, và tìm số phòng người quản lý đã xếp cho mình. Bằng cách này, ông có thể xếp phòng cho từng hành khách trên từng xe. Tuy nhiên, khách sạn sẽ có một số phòng trống, ví dụ như phòng số 6, bởi 6 không được tạo ra bởi lũy thừa của một số nguyên tố nào cả. May mắn thay, sếp của ông ta không giỏi Toán, và ông không bị đuổi việc.

Phương pháp của người quản lý chỉ thành công khi mà, tuy rằng Khách sạn Vô hạn là cơn ác mộng về lô-gic, lại chỉ ở mức độ đơn giản nhất của khái niệm vô cực, chủ yếu là số số tự nhiên vô cực đếm được: 1, 2, 3, 4,... George Cantor gọi đây là mức độ 0-aleph của vô cực. Ta dùng số tự nhiên để chỉ số phòng và số ghế trên xe buýt. Nếu phải đối mặt với những bậc cao hơn của vô cực, ví dụ như tập số thực, cách sắp xếp như trên sẽ không còn khả thi, bởi không có cách nào có thể bao gồm tất cả các số theo hệ thống.



Khách sạn Vô hạn Số thực có số phòng âm trong tầng hầm, và số phòng là phân số, nghĩa là khách phòng số  $1/2$  luôn nghi rằng phòng của anh ta bé hơn phòng số 1 bên cạnh. Nếu ta lấy căn của số phòng, ví dụ như căn 2 và phòng số pi, nơi khách thuê phòng mong chờ món tráng miệng miễn phí. Quản lý ca đêm có lòng tự trọng nào lại muốn làm ở một nơi như thế, dù lương của anh ta là vô hạn? Tại Khách sạn Vô hạn của Hilbert, không bao giờ có phòng trống và luôn còn phòng cho khách mới, những tình huống mà người quản lý cần mẫn vì quá hiểu khách phải giải quyết nhắc nhở chúng ta rằng thật khó khăn khi dùng trí óc có hạn của mình để hiểu thấu một khái niệm rộng lớn như vô hạn. Bạn có thể giúp tôi giải quyết bài Toán này, sau một giấc ngủ ngon. Nhưng thành thực mà nói, chúng tôi có thể sẽ cần bạn thức dậy và chuyển phòng vào lúc 2 giờ sáng.

Bài dịch và hình ảnh từ Youtube: TED-Ed channel



# PHẦN IV: CÁC BÀI TOÁN THÚ VỊ

Một bài Toán nhỏ.....	82
Một đồng biến mất.....	82
Bài toán đàn bò của Archimede .....	83
Tắt, mở bóng đèn .....	84
Sợi dây bao quanh vòng tròn .....	85
Một câu đố khó.....	85
Cùng ngày sinh .....	86
Hai người nông dân và con chim phá hoại.....	87
Một trò chơi không thể thua .....	88
Những con tắc kè.....	89
Hỏi: Có mấy quả cam? .....	89



# MỘT BÀI TOÁN NHỎ

Hôm nọ, tôi bán chiếc xe cũ của mình cho thằng bạn với giá 1000\$. Nó lái được một tuần rồi thì chê xe chạy chậm, không vọt. Tôi nói với nó: “*Chê thì trả đây mày!*”. Thế là tôi mua lại xe nó với giá 800\$. Nhưng tuần sau thì lại có thằng bạn khác tìm một chiếc xe cũ. Tôi nói: “*Xe chạy không nhanh được, nếu mày đồng ý thì lấy*”. Nó nói: “*Tao đâu muốn xe chạy nhanh, tới nơi được là tốt rồi*”. Thế là tôi bán xe cho nó với giá 900\$. Vậy là, tôi lời được bao nhiêu \$?

**Câu trả lời thứ nhất:**

Tôi bán xe cho thằng bạn đầu giá 1000\$ rồi mua lại giá 800\$. Tức là tôi vẫn còn chiếc xe và 200\$. Sau đó, tôi lại bán đi với giá 900\$. Vậy tôi lời được 1100\$.

**Câu trả lời thứ hai:**

Tôi mua lại xe từ thằng bạn đầu tiên giá 800USD, rồi bán cho thằng bạn thứ hai giá 900USD. Vậy là tôi lời được 100\$.

**Câu trả lời thứ ba:**

Tôi bán xe cho thằng bạn đầu giá 1000\$ rồi mua lại giá 800\$. Lúc này tôi lời 200\$. Rồi tôi bán xe tiếp với giá 900\$. Thế là tôi lời thêm 100\$ nữa. Kết luận là tôi lời 300\$.

Còn bạn, bạn cho rằng câu trả lời nào đúng? Tôi đã lời được mấy \$?

# MỘT ĐỒNG BIẾN MẤT



Bài Toán sau là khá phổ biến, nhưng lời giải thích hợp lý thì không phải ai cũng diễn giải ra được:

Cuối tuần, ba người bạn rủ nhau uống cafe. Đến khi tính tiền nước thì hết 30 ngàn đồng. Mỗi người lấy 10 ngàn ra

trả. Do cô nhân viên tính nhầm nên giá chỉ có 25 ngàn đồng, cần phải trả lại 5 ngàn đồng cho cả 3 người. Cô nhân viên vừa đi vừa lẩm bẩm: “5 ngàn đồng mà chia cho 3 người thì lẻ quá, thôi thì mình lấy bớt đi 2, đưa họ 3 để dễ chia!”. Nghỉ và làm thật, cô nhân viên chỉ trả lại cho 3 người khách 3 ngàn đồng. Cả 3 người khách vui vẻ vì được bớt đi 1 ngàn đồng quý giá trong thời buổi kinh tế khó khăn.

Như vậy: Mỗi người khách chỉ trả 9 ngàn đồng, tất cả  $9 \times 3 = 27$  ngàn đồng, cô nhân viên “ăn” hết 2 ngàn đồng, vị chi  $27 + 2 = 29$  ngàn đồng. Nhưng... lúc đầu mỗi người góp 10 ngàn đồng, tổng cộng 30 ngàn đồng. Bây giờ, tính lại, sao chỉ có 29 ngàn đồng! Còn 1 ngàn đồng bạc thiếu nữa, nó đã đi đâu?

Trong quyển “Không sợ Toán học” của nhà Toán học Tiệp Khắc Sedlavcek cũng có bài Toán vui kiểu như thế này, thường được để minh họa cho “cái bẫy Toán học”.

Thật ra, không có đồng nào lạc đi đâu cả, chính chúng ta mới “lạc đường”. Thay vì lấy  $27 - 2$  để có 25 ngàn đồng là tiền nước, ta lại lấy  $27 + 2$  để có 29 ngàn đồng, một con số không có ý nghĩa gì cả. Có chăng là do tình cờ 29 gần với 30 nên rất dễ gây cảm giác là còn thiếu 1.

Tóm lại:

Cộng số tiền góp của khách với số tiền lặn lưng của cô nhân viên là vô nghĩa. Cũng giống như là muốn tính tiền lời mà lại đi lấy tiền bán cộng với tiền vốn vậy. Trừ số tiền góp của khách với số tiền lặn lưng của cô nhân viên thì được tiền nước phải trả.

Archimede là một nhà Toán học, Triết học và nhà phát minh lớn của Hy Lạp cổ đại. Ông sinh năm 287 trước Công nguyên tại Syracuse trên đảo Sicily, học tại Alexandria ở Ai cập và mất năm 212 trước Công nguyên. Ông để lại nhiều công trình về hình học, số học và cơ học.

Archimede đã để lại cho hậu thế một bài Toán khó giải quyết, thường được gọi là “Bài Toán đàn bò của Archimede”. Bài Toán được Gothold Ephraim Lessing phát hiện ra trong một văn bản Hy Lạp cổ, dưới dạng một bài thơ 44 dòng. Văn bản đó được tìm thấy ở trong thư viện Herzog August ở Wolfenbüttel, Đức năm 1773.

Bài Toán đó đại ý như sau: “Tính số bò trên đảo Tricarnia. Số bò này gồm có 4 bầy phân biệt qua màu lông: trắng, đen, vàng và nâu. Trong mỗi bầy, có một số bò đực và một số bò cái. Số bò đực và số bò cái của các bầy thoả những điều kiện sau:

- (1) Số bò đực trắng = số bò đực nâu +  $\frac{5}{6}$  số bò đực đen
- (2) Số bò đực đen = số bò đực nâu +  $\frac{9}{20}$  số bò đực vàng
- (3) Số bò đực vàng = số bò đực nâu +  $\frac{13}{42}$  số bò đực trắng
- (4) Số bò cái trắng =  $\frac{7}{12}$  số bò đen
- (5) Số bò cái đen =  $\frac{9}{20}$  số bò vàng
- (6) Số bò cái vàng =  $\frac{11}{30}$  số bò nâu
- (7) Số bò cái nâu =  $\frac{13}{42}$  số bò trắng

Thật ra, bài Toán còn có thêm 2 điều kiện phức tạp nữa là:  
(8) Số bò đực trắng + số bò đực đen = một số chính phương.  
(9) Số bò đực vàng + số bò đực nâu =  $\frac{n(n+1)}{2}$ , với n là một số nguyên.

Không ai giải được bài Toán với đầy đủ 9 điều kiện như trên. Cho đến năm 1981, giàn máy tính Cray 1 ở Phòng Thí nghiệm Quốc gia Lawrence Livermore (USA) mới giải được với 47 trang giấy in và đáp án là số có 206,545 chữ số.

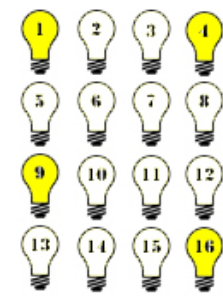
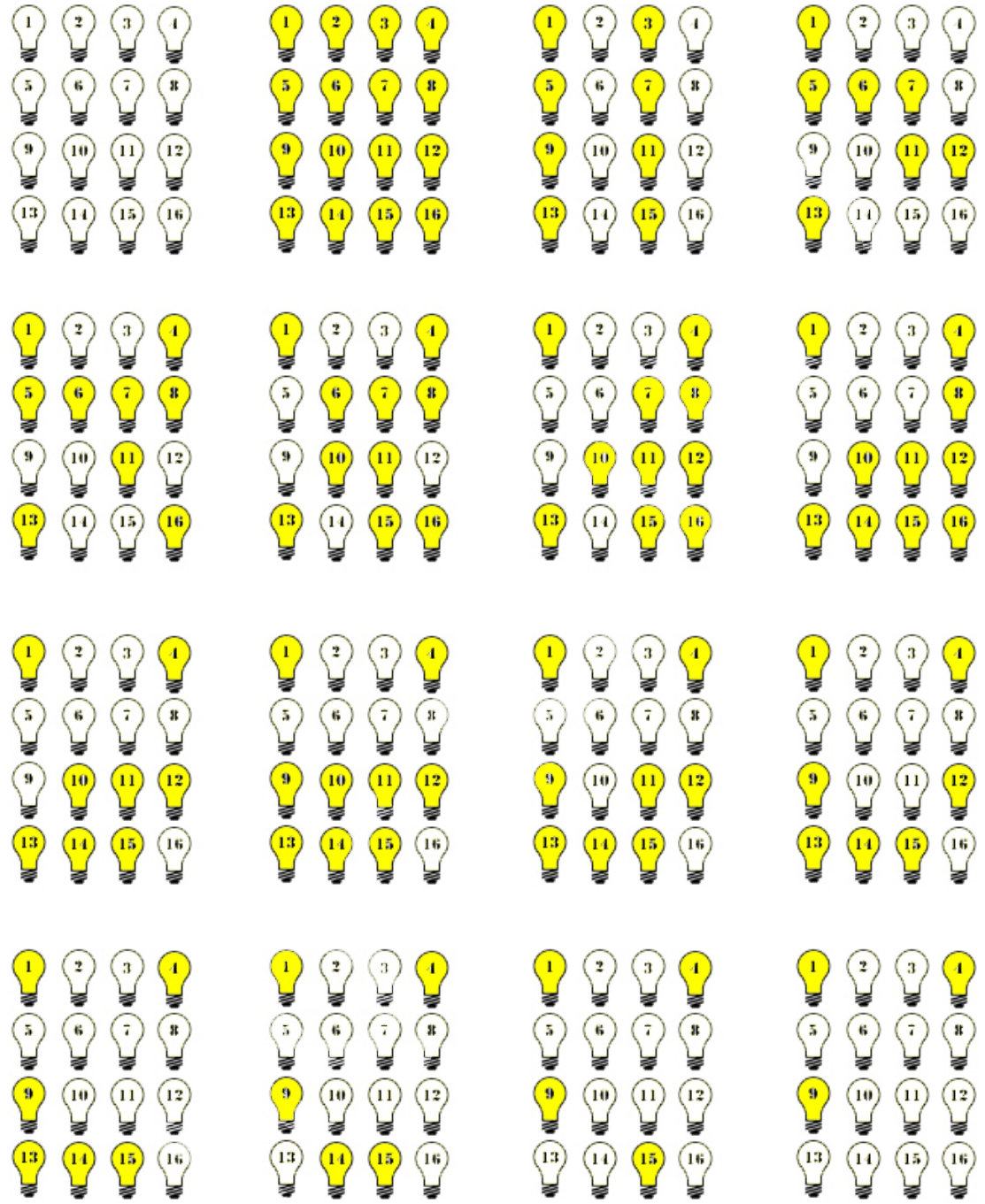
Kết quả xấp xỉ là  $7.76 \times 10^{206544}$ .



# BÀI TOÁN ĐÀN BÒ CỦA ARCHIMEDE



TẮT,  
MỞ  
BÓNG  
ĐÈN



Hãy tưởng tượng bạn có 100 bóng đèn được dán số thứ tự trên đó, tất cả đều đã tắt, không có bóng đèn nào sáng cả.

Bây giờ, bạn gạt công tắc của tất cả các bóng mang số chia hết cho 1, hiển nhiên giờ đây, mọi bóng đều sáng cả.

Tiếp tục, bạn gạt công tắc của tất cả các bóng có mang số chia hết cho 2, giờ thì chỉ có những bóng mang số lẻ là sáng thôi.

Sau đó, bạn lại gạt công tắc của những bóng đèn mang số chia hết cho 3.

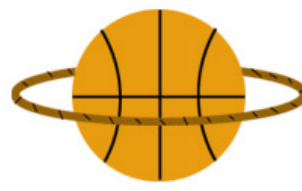
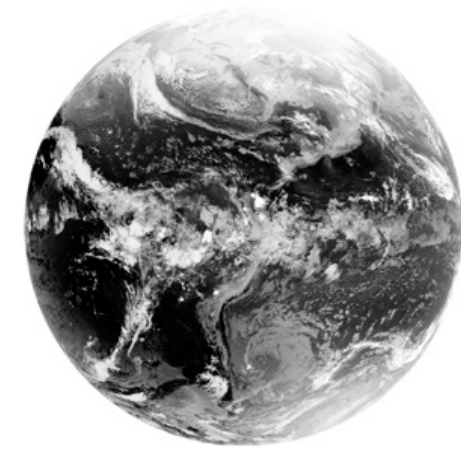
Lần thứ 4, bạn gạt công tắc những bóng chia hết cho 4.

Lần thứ 5, bạn gạt công tắc những bóng chia hết cho 5.

...  
Cứ tiếp tục như thế cho đến lần thứ 100.

Vậy thì cuối cùng, những bóng đèn nào sáng? Câu trả lời là những bóng mang số 1, 4, 9, 16, 25,... Tất cả đều là số chính phương cả (là số có dạng  $a \times a$ ).

Ảnh trên cho thấy trạng thái của 16 bóng đèn đầu tiên qua 16 lần đóng mở các công tắc.



SỢI DÂY  
BAO QUANH VÒNG TRÒN

Vậy bây giờ giả sử bạn có một sợi dây dài khùng khiếp bao quanh được xích đạo của Trái đất. Thế bạn sẽ phải cho sợi dây này dài ra thêm bao nhiêu cm để nó nối được ra vòng xích đạo cũng 1 cm như trên? Câu trả lời đáng kinh ngạc, vẫn là  $2\pi$  (2pi) cm.

Giả sử bạn có một sợi dây quấn quanh quả bóng rổ theo vòng tròn lớn nhất trên nó, đơn vị đo là cm.

Câu hỏi đặt ra là bạn sẽ phải cho sợi dây dài thêm bao nhiêu cm để nó nối được ra quả bóng rổ là 1 cm (xem ảnh)?

Câu trả lời là  $2\pi$  (2pi) cm.

Nếu dùng trực giác thì có đến 90% mọi người không trả lời chính xác câu hỏi này. Bởi vì chu vi Trái đất là 40.075,02 km = 40.075.020 cm nên rõ ràng là cần phải cho sợi dây dài ra rất nhiều thì mới nối được. Sự thật không phải như vậy. Hầu hết chúng ta đều không ngờ rằng độ dài bán kính ở đây không quan trọng.

Bạn có thể lí giải được điều bất ngờ này không?

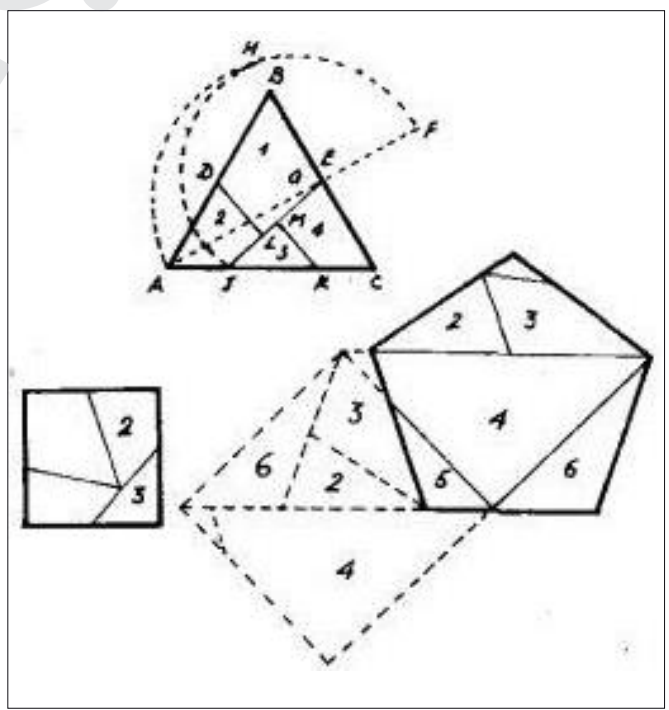
MỘT CÂU ĐỐ KHÓ

T. E. DUDENEY LÀ MỘT NHÀ CHUYÊN NGHIÊN CỨU LÝ THUYẾT TRÒ CHƠI VÀ ĐÃ SÁNG TẠO RẤT NHIỀU TRÒ CHƠI, CÂU ĐỐ LÍ THÚ.

Năm 1907, ông có xuất bản một quyển sách, trong đó đề cập, nêu ra nhiều câu đố tư duy. Để giải các câu đố đó, bạn không cần gì nhiều đến kiến thức Toán học mà chỉ cần vài kiến thức sơ cấp tối thiểu, cộng thêm một chút sáng tạo, kiên trì là được. Những câu đố của ông độc đáo là ở điểm đó, nó còn có tác dụng như là một môn “thể thao trí tuệ”. Tuy vậy, cũng có những câu đố vô cùng hiểm hóc.

Chẳng hạn như hai câu đố sau, chỉ cần dùng đến kiến thức Hình học không quá lớp 6:

- Cắt một tam giác đều làm 4 mảnh sao cho chúng ghép lại được thành một hình vuông.
- Cắt một lục giác đều làm 6 mảnh sao cho chúng ghép lại được thành một hình vuông.



Lời giải được trình bày trên hình vẽ, phác họa lại từ quyển sách của ông. Nhìn vào đó cũng thật khó mà hình dung được ông đã nghĩ ra câu đố đó như thế nào?





## CÙNG NGÀY SINH

Cần phải có bao nhiêu người trong một nhóm để xác suất ít nhất là 50% có hai người trong nhóm có cùng ngày sinh?

Một câu hỏi thú vị, nhưng cũng không đơn giản để trả lời.

Các câu trả lời theo trực giác có thể như sau:

1. Với 367 người thì chắc chắn có ít nhất 2 người cùng ngày sinh, tức là xác suất 100%. Do đó, để xác suất là 50% thì chỉ cần 367/2, khoảng 184 người.
2. Một năm có 366 ngày, tính là năm nhuận luôn cho chắc. “Có khả năng có hai người cùng ngày sinh”, nghĩa là xác suất 50%. Bởi vì ngày sinh là phân bố ngẫu nhiên nên sẽ không có khả năng để lặp lại 2 lần cho đến khi nửa năm đã trôi qua. Vì vậy sau 183 ngày, những người trong nhóm tương ứng với số ngày của nửa năm và sẽ có nhiều khả năng hơn nếu có một người nữa bước vào phòng. Vì vậy câu trả lời là 184.

Đó là sai lầm. Câu trả lời theo cảm tính ở trên chỉ đúng cho câu hỏi là “Cần phải có bao nhiêu người trong một nhóm sao cho xác suất ít nhất là 50% có một người cùng ngày sinh với tôi?”.

Câu trả lời chính xác là chỉ cần có 23 người trong nhóm thôi. Thật đáng ngạc nhiên! Con số này quá ít ỏi và không một trực giác nào cho thấy điều đó.

Đáp án là 23, để chứng minh, chỉ cần sử dụng kiến thức của lớp 11 là đủ.

## HAI NGƯỜI NÔNG DÂN VÀ CON CHIM PHÁ HOẠI

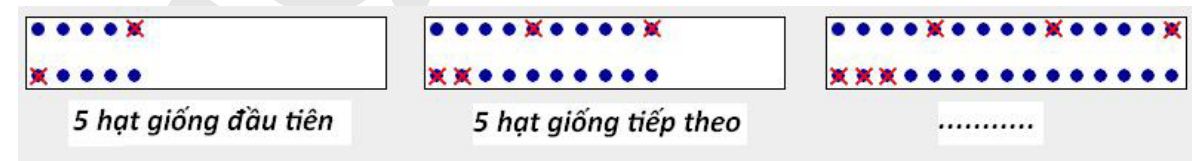
Alice và Bob là hai người nông dân, họ muốn gieo hạt giống của mình theo một hàng dài. Giả sử rằng mảnh đất của họ dài vô hạn và số lượng hạt giống cả hai bên cũng vô hạn. Tuy nhiên, cả hai phần đất trống của họ đều có một con chim chuyên đi ăn hạt giống, phá hoại theo cách khá hài hước.

Với con chim bên Alice, cứ mỗi lần Alice gieo 5 hạt giống, nó sẽ ăn mất hạt đầu tiên trong 5 hạt giống đó. Vậy là khi Alice gieo xong, số hạt đã gieo được hiển nhiên vẫn còn.

Còn con chim phá hoại của Bob hành xử theo cách khác. Bob đi ngay cạnh Alice, gieo hạt giống của mình, cứ mỗi khi Bob gieo xong 5 hạt giống, con chim sẽ tuần tự ăn mỗi một hạt tính từ hạt giống đầu tiên được gieo. Vậy là khi Bob kết thúc công việc của mình, số hạt giống anh ấy đã gieo được liệu có còn không?

KHÔNG! Là do mỗi một hạt giống Bob đã gieo đều đã bị con chim ăn mất. Nhưng thật là quái lạ. Bob đi ngay cạnh Alice, gieo hạt giống của mình cùng lúc với Alice, cùng một tốc độ làm việc, kết thúc cũng tại một thời điểm. Tại sao điều này lại có thể???

Chắc chắn đây là một nghịch lí, nhưng nó thể hiện ra ở đâu?



Điểm quan trọng ở đây là chúng ta đang bàn đến cái Vô Hạn. Có thể bạn sẽ cho rằng Alice và Bob sẽ không bao giờ hoàn thành việc gieo hạt, vậy nên, chẳng có nghịch lí gì ở đây cả.

Nhưng đó vẫn chưa phải là câu trả lời cho vấn đề. Chẳng hạn, có thể cho là họ gieo hạt đầu tiên trong 1 giây, hạt thứ 2 trong 1/2 giây, hạt thứ 3 là 1/4 giây,... Như vậy, sau 2 giây, họ sẽ hoàn thành công việc của mình cho dù số hạt giống có thể là Vô Hạn.

Bản chất của nghịch lí chính là sự phản trực giác của chúng ta đối với một tập hợp Vô Hạn đếm được. Một tập hợp đếm được là tập có thể cho tương ứng một-một những phần tử của nó với những phần tử thuộc một tập con của tập Số tự nhiên, thuật ngữ Toán học gọi đó là một Song ánh.

Vậy là tập hợp các hạt giống của hai chú chim phá hoại của chúng ta có cùng lực lượng, vì có sự tương ứng một-một giữa chúng, là cứ sau mỗi khi 5 hạt được gieo, một hạt giống lại bị ăn mất.

Ad nghĩ các bạn cũng khó mà hiểu được cái Vô hạn nó sẽ thể hiện ra như thế nào? Đôi khi có những hiện tượng đi ngược lại nhận thức, trực giác thông thường. Việc nghiên cứu cái Vô hạn đã khiến một nhà Toán học lừng lẫy phát điên, thế nên cũng không có gì lạ là ta chưa hiểu rõ về Vô hạn.

P/s:  $1 + (1/2 + 1/4 + \dots) = 1 + 1 = 2$ , tổng này ad đã đề cập trong bài viết nghịch lí Zenon trước đây.



## MỘT TRÒ CHƠI KHÔNG THỂ THUA



Số người chơi: 2

Luật chơi:

Cho 9 lá bài A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (coi A như 1) được lật ngửa hết cả lên.

Mỗi người chơi lần lượt rút một lá bài, rút đến khi nào có 3 lá bài thỏa mãn tổng số trên mỗi quân bài là 15 thì người chơi đó thắng.

Trường hợp khi đã rút hết mà không có ai có 3 lá bài thỏa mãn yêu cầu trên thì kết quả coi như hòa.

Luật chơi chỉ có thế, tuy vậy nhưng khi chơi, bạn phải vận dụng khả năng tính Toán, tập trung, phán đoán của mình thật tốt thì mới có cơ hội chiến thắng.

Tôi có một thuật Toán (mẹo) rất đơn giản để chiến thắng (hoặc ít nhất là không thể thua được) trò chơi này mà không cần phải thực hiện tính toán gì cả.

Bạn có thể đoán được tôi làm cách nào không?

Lời giải như sau:

### JOHN VON NEUMANN VÀ TRÒ CHƠI KHÔNG THỂ THUA CUỘC

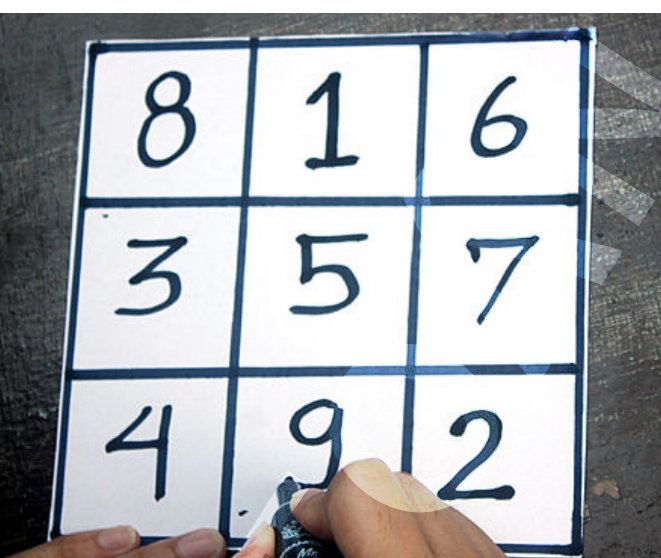
John von Neumann (3.12.1903 - 8.2.1957) là một nhà Toán học lỗi lạc, đã nghĩ ra một trò chơi như trên.

Một lần, có một người bạn nhờ ông bật mí cách để thắng trò chơi này dễ dàng. Ông ngầm nhớ lại một lúc rồi nói: “Trò này khá hay. Người rút trước sẽ thắng. Còn người rút sau, nếu đối phó tốt, vẫn giữ được thế hòa”.

Bí quyết của John von Neumann là gì?

Ở bài viết lần trước, ad đã giới thiệu sơ qua về Ma phương, hẳn các bạn cũng đã biết nó là gì. Yêu cầu của trò chơi này là 3 lá bài trong tay phải có tổng số là 15. Nói một cách khác, bạn phải chọn 3 lá bài có thể đặt được vào Ma phương như trong hình. Đây là Ma phương bậc 3, tổng hàng ngang, dọc, chéo đều là 15.

Như vậy, đối sách của trò chơi chẳng qua chỉ là trò đánh Caro 3x3. Vấn đề là bạn phải nhớ được Ma phương này trong đầu. Số 5 nằm ở trung tâm Ma phương nên người đi trước nên luôn chọn lá bài số 5. Nếu đối phương đi sau mà không biết được thuật Toán thì khả năng thua (hay không thể thắng được) là rất cao.



## HỎI: CÓ MẤY QUẢ CAM?

Trên một hòn đảo nọ, có những con tắc kè có thể biến mình thành ba màu khác nhau: đỏ, xanh lá, vàng. Một lần, chúng liên tiếp gặp nhau theo cặp. Khi hai con tắc kè khác màu gặp nhau, cả hai chuyển mình sang cùng một màu khác (chẳng hạn con màu đỏ gặp con màu xanh lá thì cả hai chuyển thành màu vàng). Cho biết số lượng tắc kè ban đầu theo mỗi màu trên là 13, 15 và 17. Hỏi rằng có thể sắp đặt theo một cách nào đó các cuộc gặp của những con tắc kè sao cho tất cả chúng sẽ có cùng một màu?

TRẢ LỜI:

Số con tắc kè màu đỏ  $r = 13$ , màu xanh lá  $g = 15$ , vàng  $y = 17$ .

Để thuận tiện, chúng ta có thể kí hiệu theo số tắc kè mỗi màu kiểu vector là  $(r, g, y) = (13, 15, 17)$ .

Khi hai con tắc kè khác màu gặp nhau, cả hai chuyển mình sang cùng một màu khác.

Chẳng hạn con màu đỏ gặp con màu xanh lá thì cả hai chuyển thành màu vàng, tức là số lượng con màu đỏ và xanh lá giảm 1, còn vàng thì tăng 2.

Như vậy, cứ sau mỗi lần gặp nhau giữa hai con tắc kè thì số lượng mỗi màu sẽ thay đổi vào một trong ba trường hợp:

$$u = (1, 1, 2), \quad v = (1, 2, 1), \quad w = (2, 1, 1)$$

tức là vector  $(r, g, y)$  được cộng vào một trong 3 vector này để biểu thị số lượng mỗi màu.

Mánh khoé ở đây là xét trong modun 3 của tập số nguyên. Trong modun 3, ba vector trên đều là  $u = v = w = (2, 2, 2)$  và vector  $(r, g, y) = (13, 15, 17) = (1, 0, 2) \pmod{3}$ .

Quan sát thấy

$$(1, 0, 2) + (2, 2, 2) = (0, 2, 1) \pmod{3}$$

$$(0, 2, 1) + (2, 2, 2) = (2, 1, 0) \pmod{3}$$

$$(2, 1, 0) + (2, 2, 2) = (1, 0, 2) \pmod{3}$$

Yêu cầu của bài Toán đặt ra là cả 45 con tắc kè đều có cùng một màu, tức là ta phải thu về được vector  $(45, 0, 0)$ ,  $(0, 45, 0)$  hoặc  $(0, 0, 45)$ , tất cả đều là  $(0, 0, 0) \pmod{3}$ .

Thế nhưng điều đó là không thể vì theo quan sát trên, ba vector  $(0, 2, 1)$ ,  $(2, 1, 0)$  và  $(1, 0, 2)$  biến thành nhau sau mỗi lần hai con tắc kè gặp mặt.

Vậy câu trả lời là không thể đạt được yêu cầu bài Toán.



## NHỮNG CON TẮC KÈ



# PHẦN V: TRÒ CHƠI & ỨNG DỤNG

*Ứng dụng, website hỗ trợ việc học Toán*

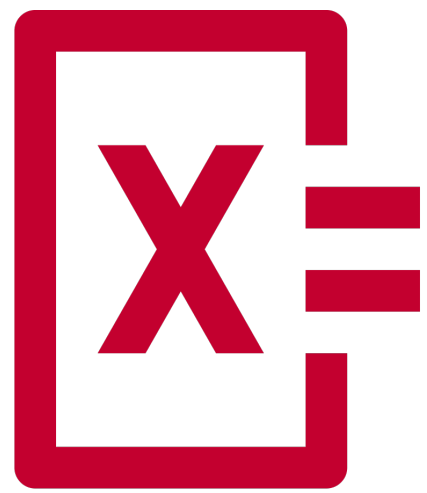
PhotoMath: Scan và giải Toán .....	92
CyM@th: Giải một bài Toán chi tiết cho bạn .....	93
Wolfram: Bộ phần mềm di động trên cả tuyệt vời .....	94

*Trò chơi với chủ đề Toán học*

Monument Valley .....	96
2048.....	97
Hocus: Chinh phục ảo giác .....	98







photomath  
by microblink

SCAN VÀ GIẢI TOÁN

MOBILE  
Application

## PHOTOMATH

Năm 2014, MicroBlink ra mắt một ứng dụng di động cho hai nền tảng iOS và Windows Phone, dự kiến sẽ có mặt trên Android vào đầu năm 2015. Đúng như tên gọi, bạn sử dụng PhotoMath bằng cách scan phép tính, biểu thức, phương trình Toán học trên sách và PhotoMath sẽ cho ra kết quả, không chỉ thế, nó còn cho bạn biết các bước giải bài Toán.

Vì mới ra đời và ý tưởng còn quá mới mẻ, PhotoMath chỉ hỗ trợ bài Toán rất đơn giản như: biểu thức số học, phân số, số thập phân, phương trình đại số đơn giản,... Tuy vậy, ứng dụng luôn được nhà phát triển cải tiến đưa vào những bài Toán phức tạp hơn như tính tích phân, số phức, hệ phương trình,... và sẽ bổ sung vào những bản cập nhật.



WEBSITE  
Application

CYM@TH

cym@th  
Complexity Made Simple

GIẢI MỘT BÀI TOÁN CHI TIẾT CHO BẠN. CÔNG CỤ ĐẶC LỰC GIÚP ÍCH CHO VIỆC HỌC TOÁN.

Đứng trước một biểu thức phức khó đơn giản, khai triển, một phương trình không biết hướng giải quyết hay một tích phân không biết cách đổi biến thế nào,... thì với trang web CyMath.com, bạn không chỉ biết được kết quả mà còn có được một bài giải chi tiết, rõ ràng từng bước.

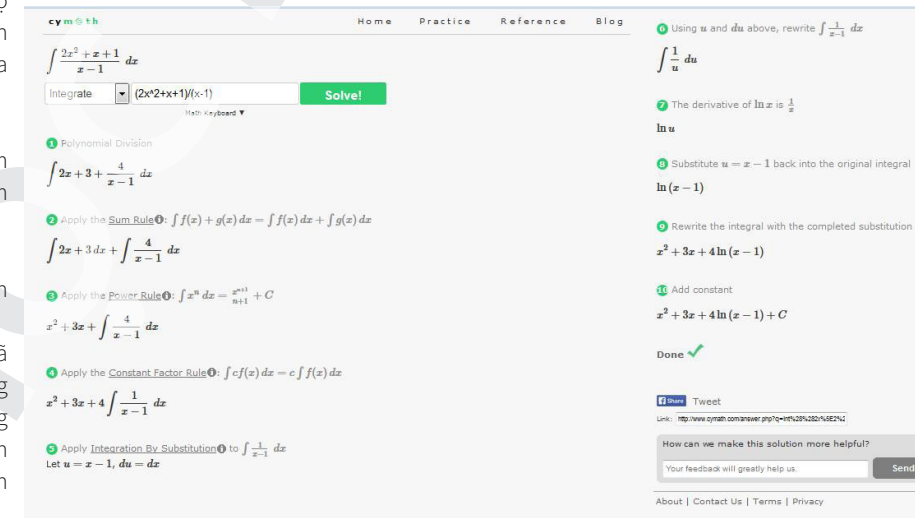
Tuy CyMath không hỗ trợ tiếng Việt nhưng rất dễ để bạn đoán biết, hiểu được nghĩa của lời giải.

Trên ảnh là một thử nghiệm với nguyên hàm của hàm phân thức

$$(2x^2 + x + 1)/(x - 1)$$

tương đối khó cho một phần mềm giải Toán.

Chưa đến 5 giây, CyMath đã cho ra một bài giải vô cùng hoàn hảo và chi tiết, hướng dẫn từng bước làm, đổi biến ra sao, công thức nào cần phải sử dụng,...



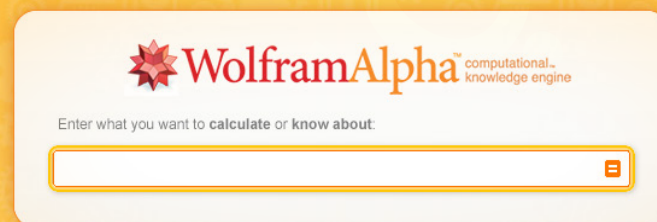
Để sử dụng CyMath, bạn phải hiểu nghĩa các thuật ngữ tiếng Anh:

- Complete the Square: dạng toàn phương
- Differentiate: đạo hàm, vi phân
- Expand: khai triển biểu thức
- Factor: phân tích biểu thức thành nhân tử
- Integrate: nguyên hàm
- Partial fraction: phân tích phân thức thành các phân thức sơ cấp
- Prime factorization: tìm các ước nguyên tố của một số
- Simplify: đơn giản biểu thức
- Solve Equation: giải phương trình

Chắc chắn CyMath là một công cụ đặc lực cho việc học Toán. Sau hết, hãy tận dụng, chứ đừng lạm dụng các bạn nhé!



# WOLFRAM BỘ PHẦN MỀM DI ĐỘNG TRÊN CẢ TUYỆT VỜI



Examples by Topic | Settings | More ▾

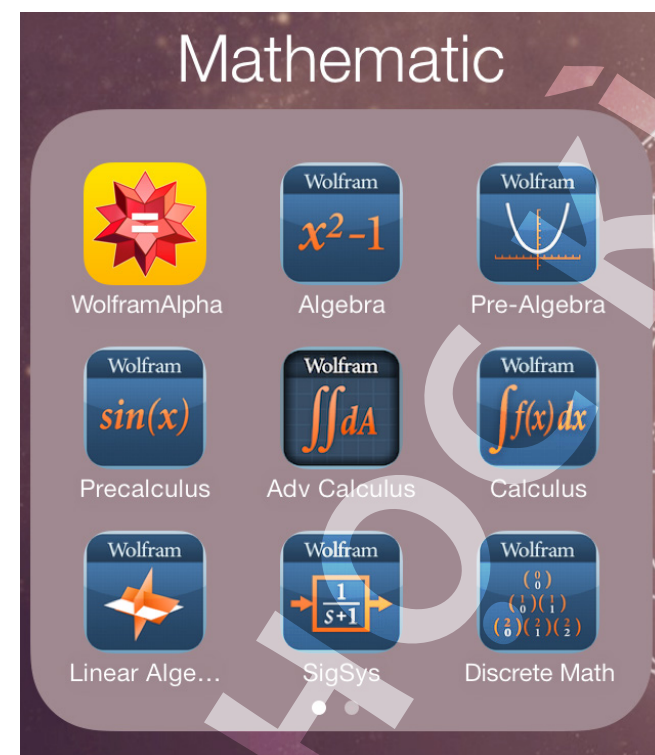
Wolfram|Alpha (hay còn được viết là WolframAlpha hoặc Wolfram Alpha) là một máy trả lời do Wolfram Research phát triển. Đây là một dịch vụ trực tuyến có nhiệm vụ trả lời các câu hỏi nhập vào trực tiếp bằng cách tính toán câu trả lời từ các dữ liệu có cấu trúc, chứ không chỉ cung cấp một danh sách các tài liệu hoặc trang có web có thể chứa câu trả lời như cách máy tìm kiếm thường làm.

Website này được Stephen Wolfram công bố vào tháng 3 năm 2009, và được phát hành cho công chúng ngày 15 tháng 5 năm 2009.

Nói riêng về Toán học, Wolfram đã cho ra đời một bộ phần mềm di động đồ sộ chuyên tính toán những phép tính phức tạp mà hiện nay chưa có phần mềm nào làm được như vậy. Cụ thể như sau:

**ALGEBRA:** Giải phương trình đa thức bậc bất kỳ, phương trình vô tỷ, hệ phương trình 4 ẩn. Tìm tập xác định, tập giá trị, vẽ đồ thị của hàm số. Nhân, chia, cộng, trừ đa thức. Phân tích đa thức thành nhân tử. Khai triển đa thức tích.

**PRE-ALGEBRA:** Các phép Toán về số nguyên tố. Đổi các đơn vị tính Toán: độ dài, diện tích, khối lượng. Tìm giá trị trung bình, làm tròn.



**PRECACULUS:** Thực hiện các phép Toán lượng giác: rút gọn, khai triển biểu thức lượng giác, giải phương trình lượng giác.

**CACULUS:** Thực hiện các phép Toán giải tích một biến: tính giới hạn, đạo hàm, nguyên hàm, tích phân, xét sự hội tụ và tính tổng một chuỗi số, khai triển Taylor, Fourier.

**MULTIVARIABLE CACULUS:** Thực hiện các phép Toán giải tích nhiều biến (như trên) và giải phương trình vi phân.

**LINEAR ALGEBRA:** Thực hiện các phép Toán trong Đại số tuyến tính: cộng, trừ, nhân ma trận; tìm hạng ma trận; đưa ma trận về dạng bậc thang; tính định thức; tìm ma trận nghịch đảo và ma trận phụ hợp; tìm giá trị riêng, vector riêng của ma trận; trực giao hoá và trực chuẩn hoá một hệ vector; xét sự độc lập hay phụ thuộc tuyến tính, ...

**STASTITICS:** Thực hiện các phép Toán về xác suất: phương sai, độ lệch chuẩn, mode,...

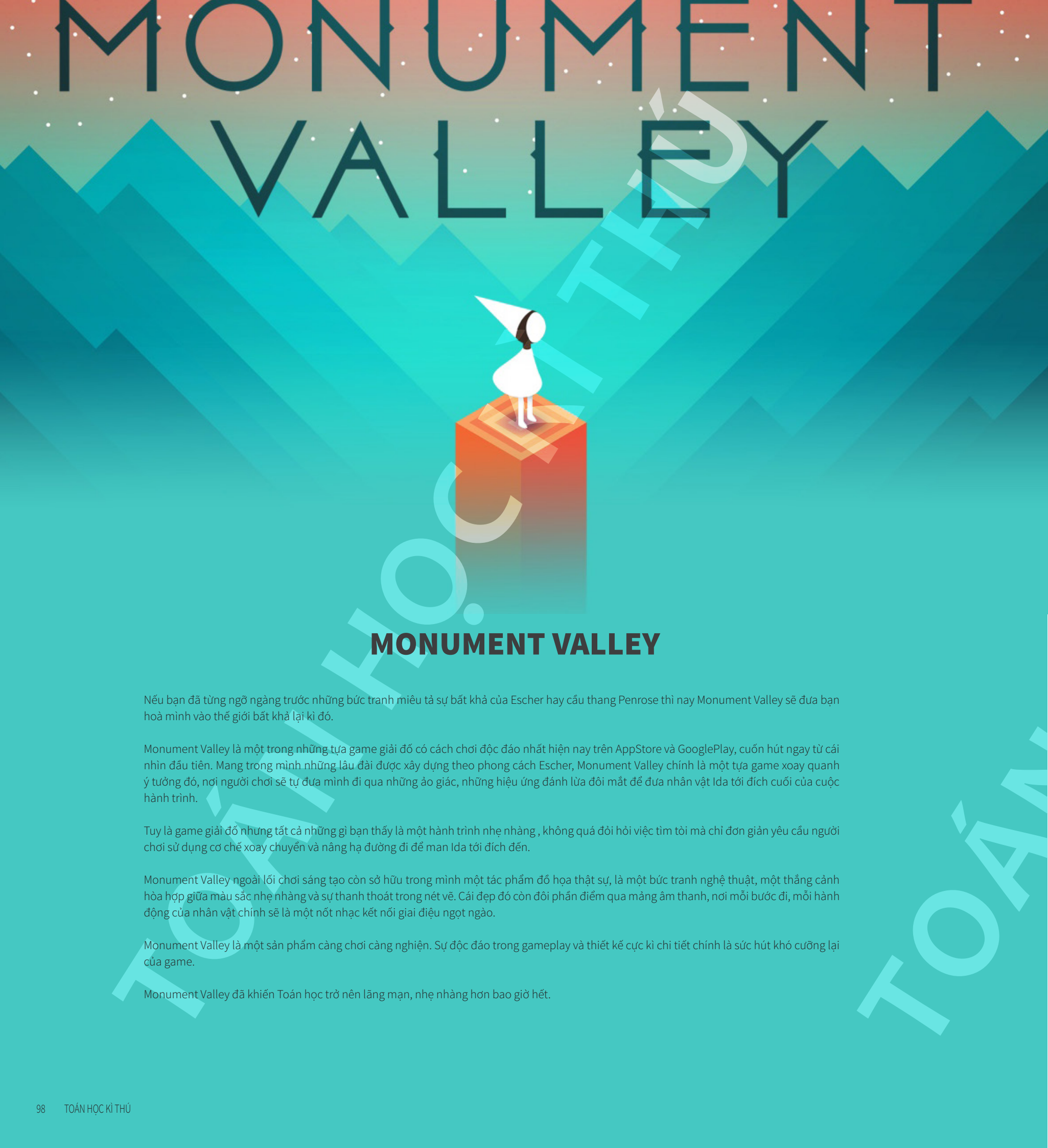
**SINGALS & SYSTEMS:** Thực hiện các phép Toán cơ bản và nâng cao về số phức.

**DISCRETE MATHEMATICS:** Tính Toán các phép Toán logic và số học.

Điểm đáng chú ý của Wolfram là ở một số phép Toán tương đối khó trở xuống, nó sẽ hiển thị từng bước giải (dù một vài bước có vẻ hơi dài dòng và ngớ ngẩn)

Wolfram cực kì hữu dụng cho sinh viên ngành Toán cũng như học sinh phổ thông và cả Giảng viên khoa Toán. Wolfram hỗ trợ iOS lẫn Android.





# MONUMENT VALLEY

Nếu bạn đã từng ngỡ ngàng trước những bức tranh miêu tả sự bất khả của Escher hay cầu thang Penrose thì nay Monument Valley sẽ đưa bạn hoà mình vào thế giới bất khả lại kì đó.

Monument Valley là một trong những tựa game giải đố có cách chơi độc đáo nhất hiện nay trên AppStore và GooglePlay, cuốn hút ngay từ cái nhìn đầu tiên. Mang trong mình những lâu đài được xây dựng theo phong cách Escher, Monument Valley chính là một tựa game xoay quanh ý tưởng đó, nơi người chơi sẽ tự đưa mình đi qua những ảo giác, những hiệu ứng đánh lừa đôi mắt để đưa nhân vật Ida tới đích cuối của cuộc hành trình.

Tuy là game giải đố nhưng tất cả những gì bạn thấy là một hành trình nhẹ nhàng , không quá đòi hỏi việc tìm tòi mà chỉ đơn giản yêu cầu người chơi sử dụng cơ chế xoay chuyển và nâng hạ đường đi để man Ida tới đích đến.

Monument Valley ngoài lối chơi sáng tạo còn sở hữu trong mình một tác phẩm đồ họa thật sự, là một bức tranh nghệ thuật, một thắng cảnh hòa hợp giữa màu sắc nhẹ nhàng và sự thanh thoát trong nét vẽ. Cái đẹp đó còn đôi phần điểm qua mảng âm thanh, nơi mỗi bước đi, mỗi hành động của nhân vật chính sẽ là một nốt nhạc kết nối giai điệu ngọt ngào.

Monument Valley là một sản phẩm càng chơi càng nghiện. Sự độc đáo trong gameplay và thiết kế cực kì chi tiết chính là sức hút khó cưỡng lại của game.

Monument Valley đã khiến Toán học trở nên lãng mạn, nhẹ nhàng hơn bao giờ hết.

# 2048

2048 là game xuất hiện khoảng đầu năm 2014 với cách chơi vô cùng đơn giản: Bạn có một bảng 4 4 ô số, bạn chỉ việc di chuyển các ô số sao hai ô số cùng giá trị được nhập vào nhau, mỗi lần di chuyển là có thêm ô số mới xuất hiện. Các giá trị số là 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048. Và con số 2048 chính là đích đến của trò chơi bởi vì nó khá khó. Mặc dù vậy, bạn vẫn có thể tiếp tục game cho đến 4096, 8192, 16348. Như vậy, 2048 là một game điểm, không có điểm dừng.

Tác giả trò chơi là Gabriele Cirulli, người Ý, sinh năm 1994, tuổi đời rất trẻ và anh chàng viết game chỉ trong 48 giờ sau khi có ý tưởng về trò chơi. Muốn thành công, chỉ cần có ý tưởng đột phá mà đơn giản.

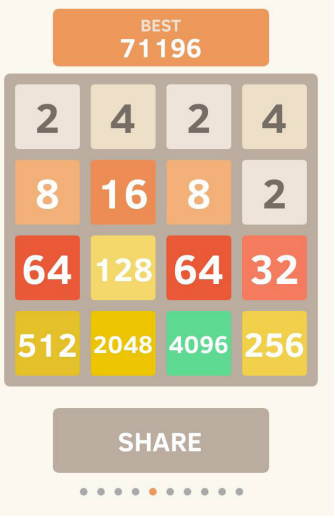
2048 là cơn sốt game sau Flappy Bird-một game gây nghiện nhưng vô bổ, làm cho người ta trở nên lười suy nghĩ và vận động. Còn 2048 thì khác, thông minh, nhanh nhẹn, sử dụng trí óc và bộ não. 2048 hỗ trợ trên các thiết bị iOS, Android và cả PC. Hiện có rất nhiều game khác ăn theo 2048.

**LÀM THẾ NÀO ĐỂ ĐẠT ĐƯỢC ĐIỂM CAO?**  
**-QUY TẮC 1: LUÔN ĐẶT Ô SỐ LỚN NHẤT Ở GÓC**  
**-QUY TẮC 2: SẮP XẾP DÒNG (CỘT) CHỨA Ô SỐ LỚN NHẤT THEO THỨ TỰ TĂNG DẦN**

Trong bài hướng dẫn này, ad đặt ô số lớn nhất ở góc dưới cùng bên phải, dòng cuối là dòng được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

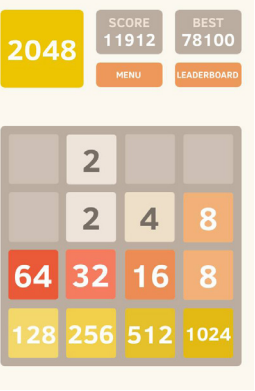
Nếu bạn có cách sắp đặt như vậy, bạn sẽ đồng thời “ăn” được rất nhiều điểm và giải phóng một lượng lớn các ô số, bảng số lúc này sẽ rất trống trải.

Quan sát trên hình, bạn có thể thấy nhập hai ô số 2 vào nhau rồi từ đó nhập liên tục đến khi ô 2048



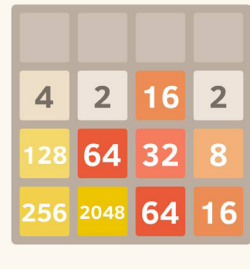
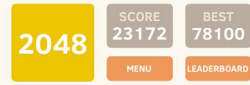
xuất hiện. Như vậy là bạn đã thắng trò chơi bước đầu rồi đấy.

Đây là hai quy tắc đầu tiên và quan trọng nhất. Để tránh hai quy tắc này bị phá vỡ, đừng bao giờ di chuyển lên hoặc qua trái vì nếu không, ô ở góc sẽ thành ô số 2 hay 4 khiến cho việc giải phóng ô số trở nên khó khăn hoặc bạn buộc phải biến ô ở góc trở thành ô số lớn nhất lại từ đầu.



## CÁCH GỠ MỘT SỐ THỂ BÍ

2048 là một trò chơi không có undo, mỗi nước đi đều quan trọng và phải rất cẩn thận. Thể bí ở đây là việc phá vỡ hai quy tắc, đó là ô ở góc không còn là ô số cao nhất do bạn vô tình hoặc bắt buộc di chuyển lên hoặc qua trái trong một số trường hợp. Thể là ô ở góc trở thành ô số 2.



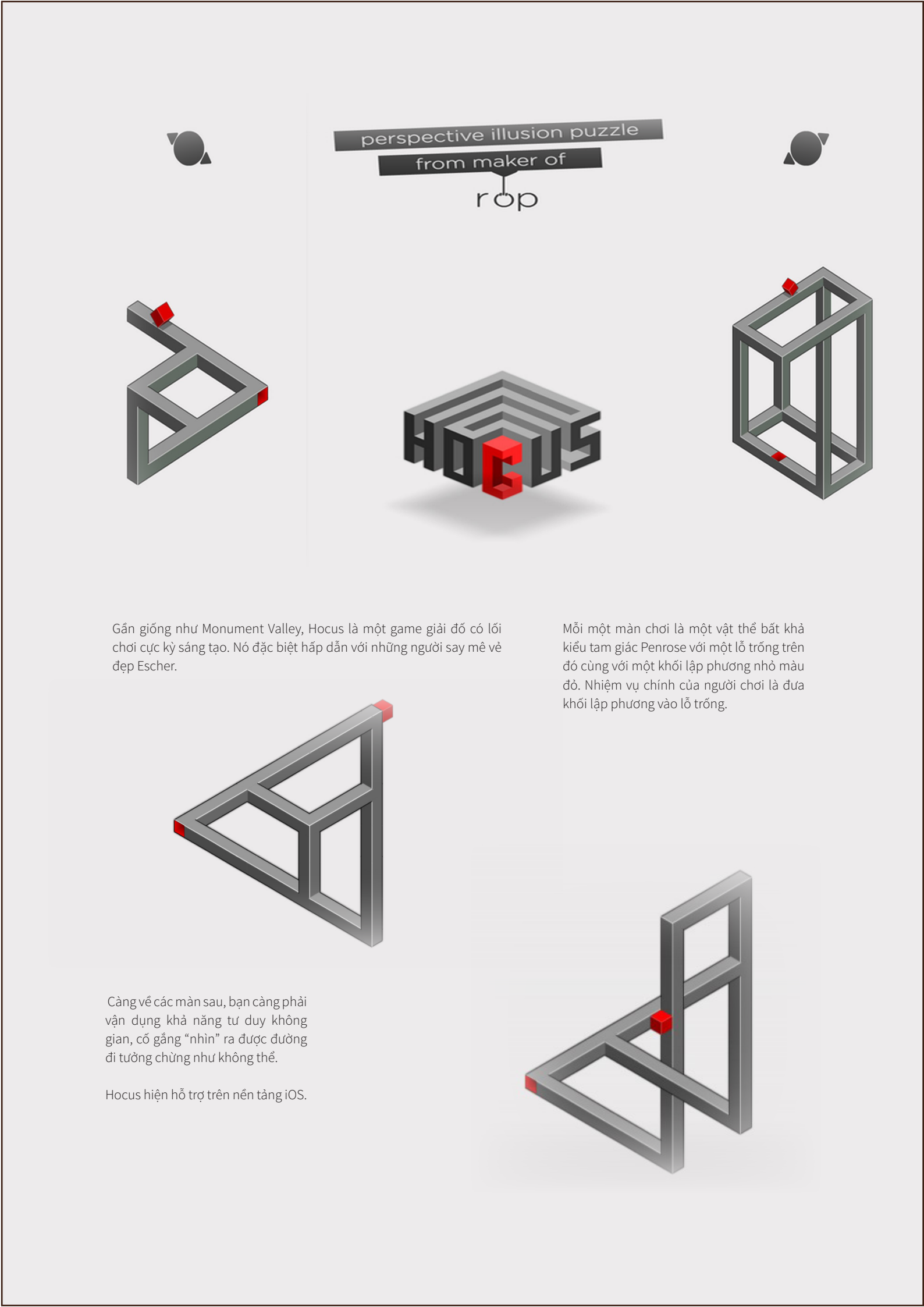
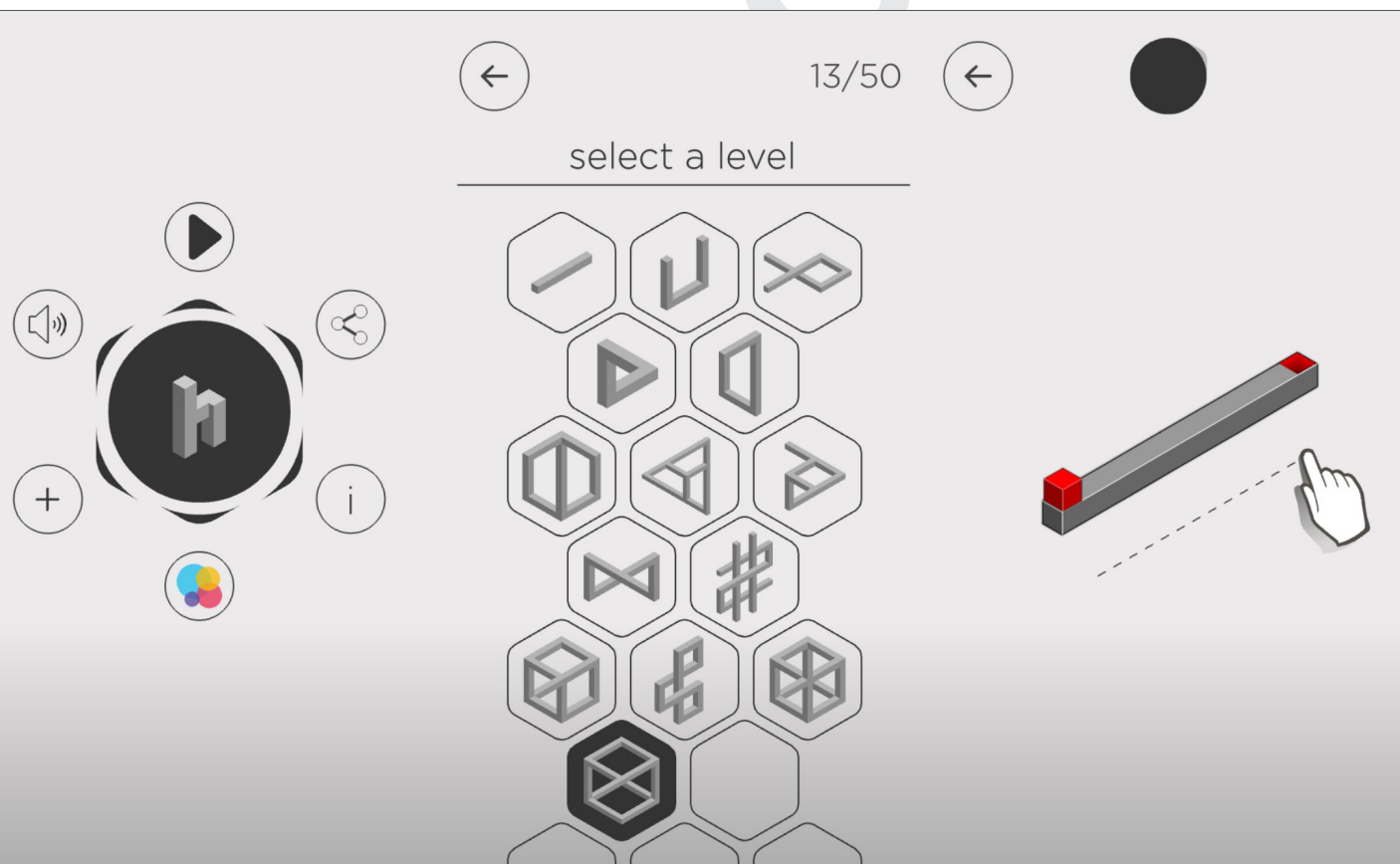
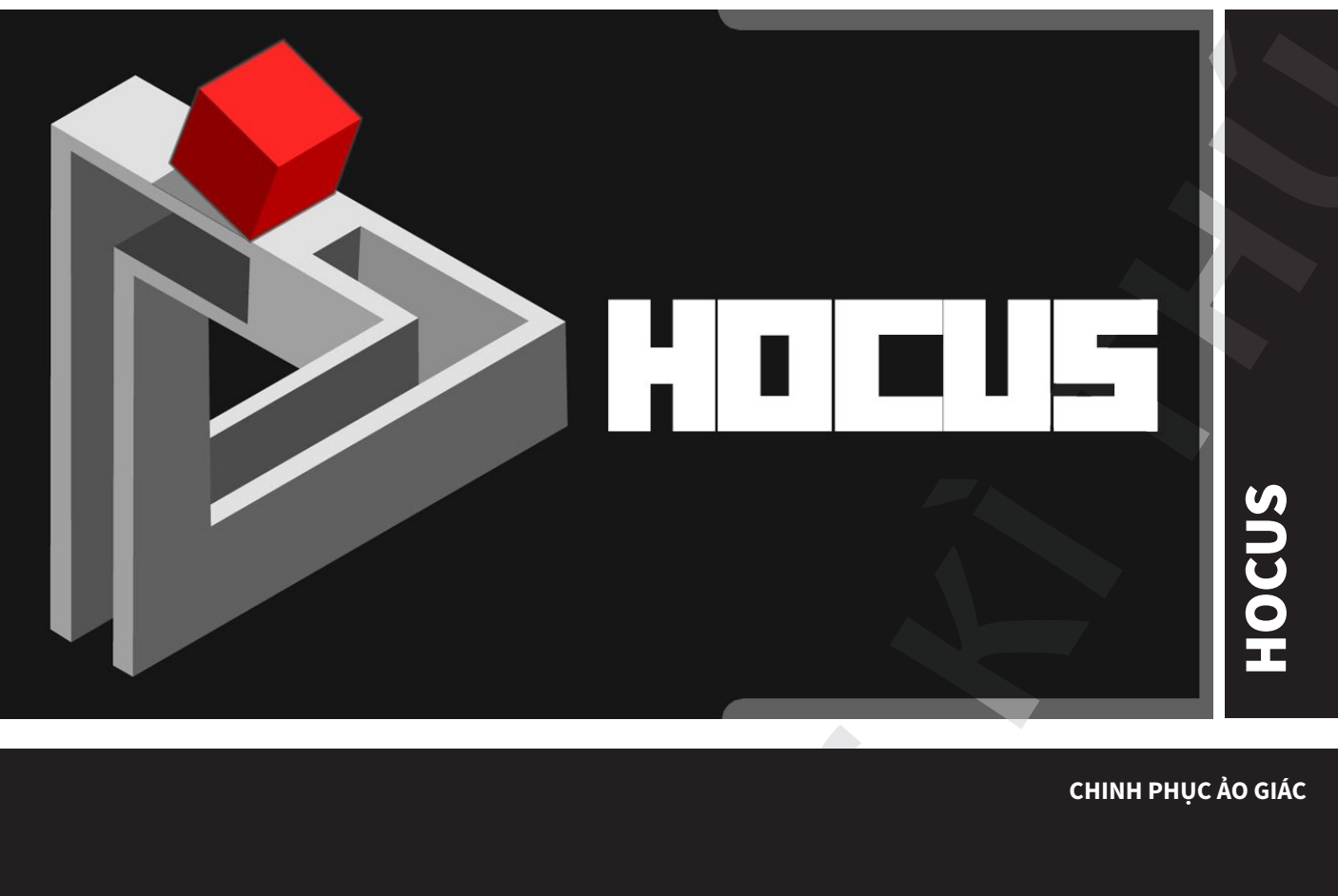
-Nếu như ô số cao nhất là 512 (trở xuống), bạn hãy cố gắng biến ô số 2 đó thành 512 và nhập thành 1024, cho nó chiếm ngay vị trí ô ở góc, sự an toàn đã trở lại và bạn hãy tiếp tục cuộc chơi.

-Trường hợp ô số cao nhất là 1024 trở lên thì lúc này chúng ta khó mà thực hiện theo cách trên được, biến ô số 2 thành 1024 mà không có sự nhập ô liên tiếp. Lấy ví dụ trên hình, ô cao nhất là 2048, ô ở góc là 16, bạn không nên biến ô 16 thành ô số cao nhất mà hãy biến ô 256. Đơn giản là vì 256 lớn hơn 16 rất nhiều lần. Hơn nữa, các ô số gần với 256 được tạo thành trong quá trình chơi sẽ dễ nhập vào 256 hơn là 16, việc này cũng tạo ra

khoảng trống nhiều. Biến 256→2048, nhập chúng lại thành 4096, cho nó nằm ngay ô ở góc dưới bên trái. Theo quy tắc 2, bạn sắp xếp hàng dưới cùng theo thứ tự GIẢM từ 4096 trở xuống và tiếp tục trò chơi.

Lúc này hai quy tắc được thể hiện có vẻ ngược một chút nên đừng bao giờ di chuyển lên và qua phải.





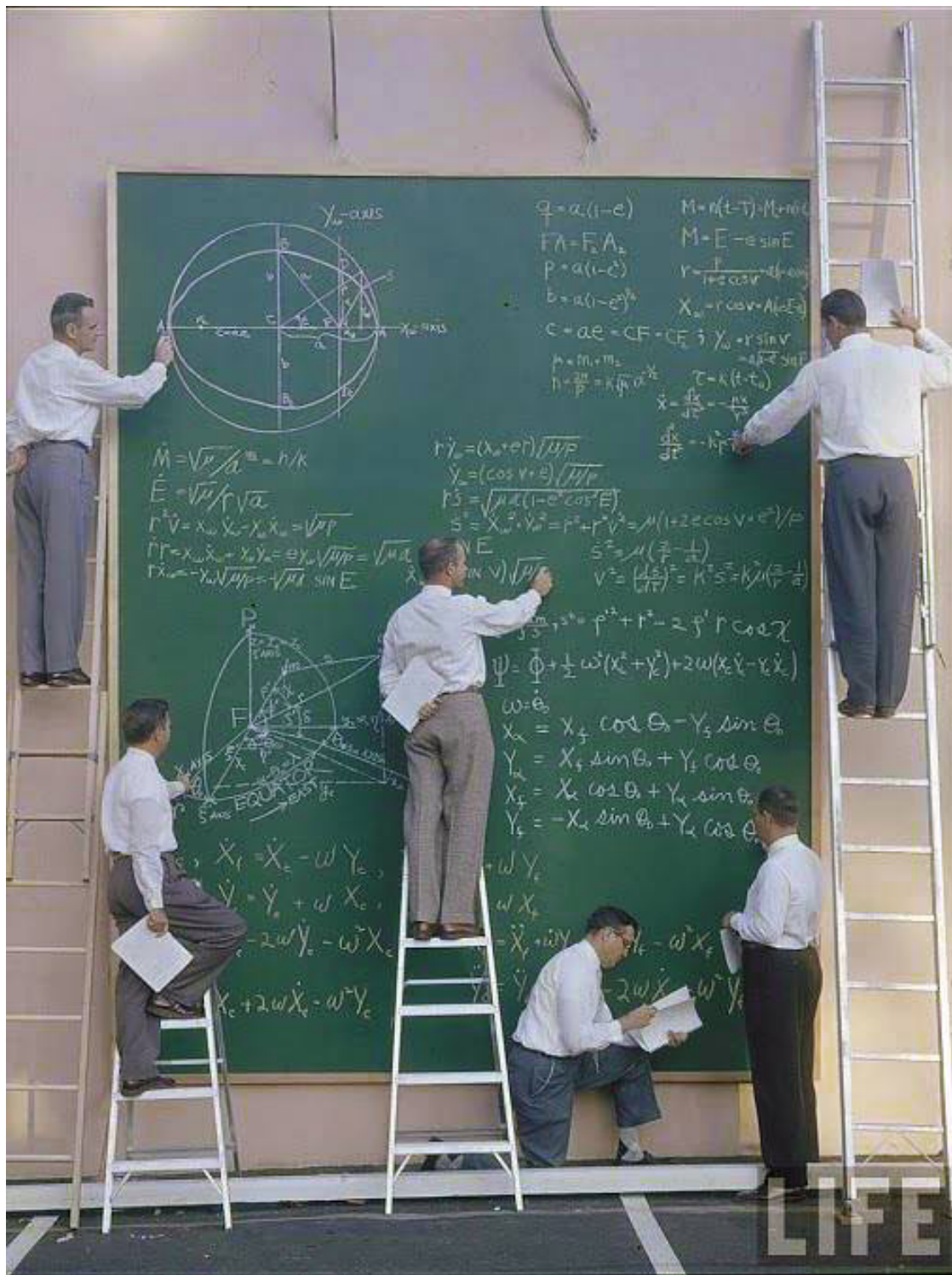


PHẦN VI:

NHỮNG HÌNH ẢNH THÚ VỊ



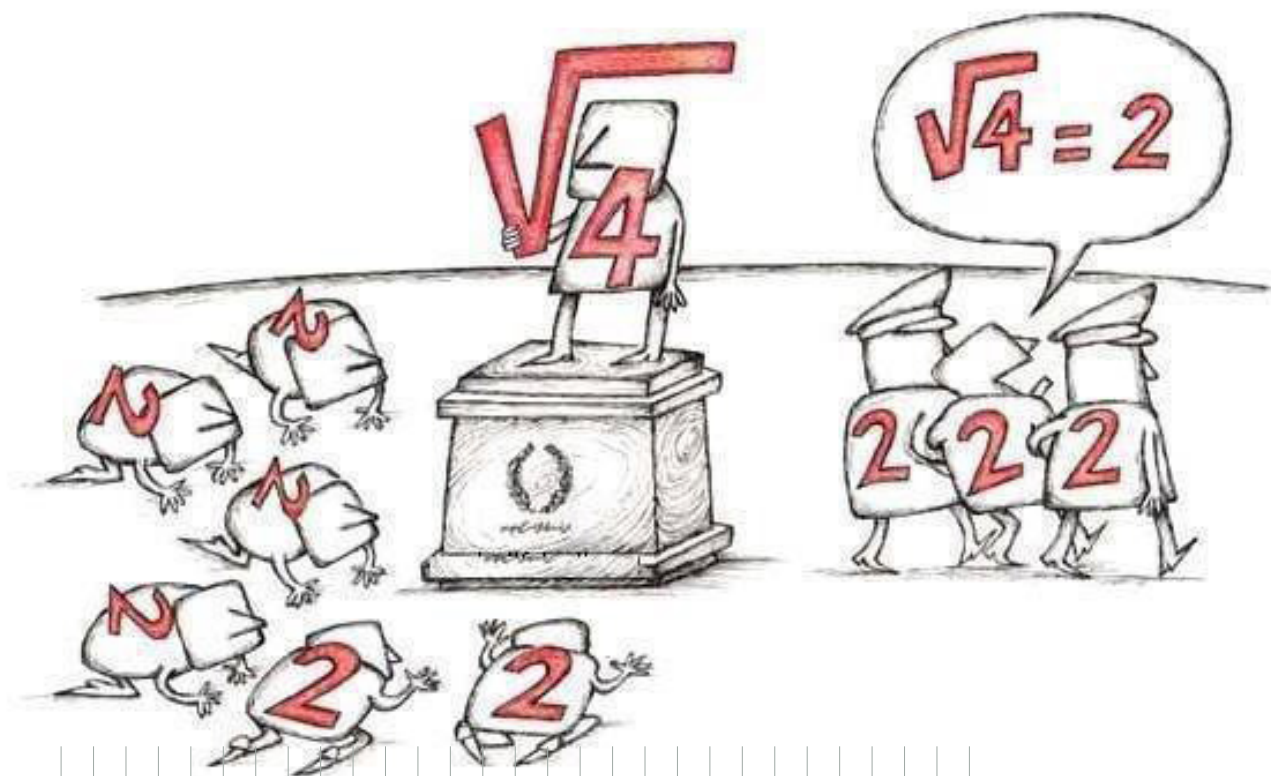




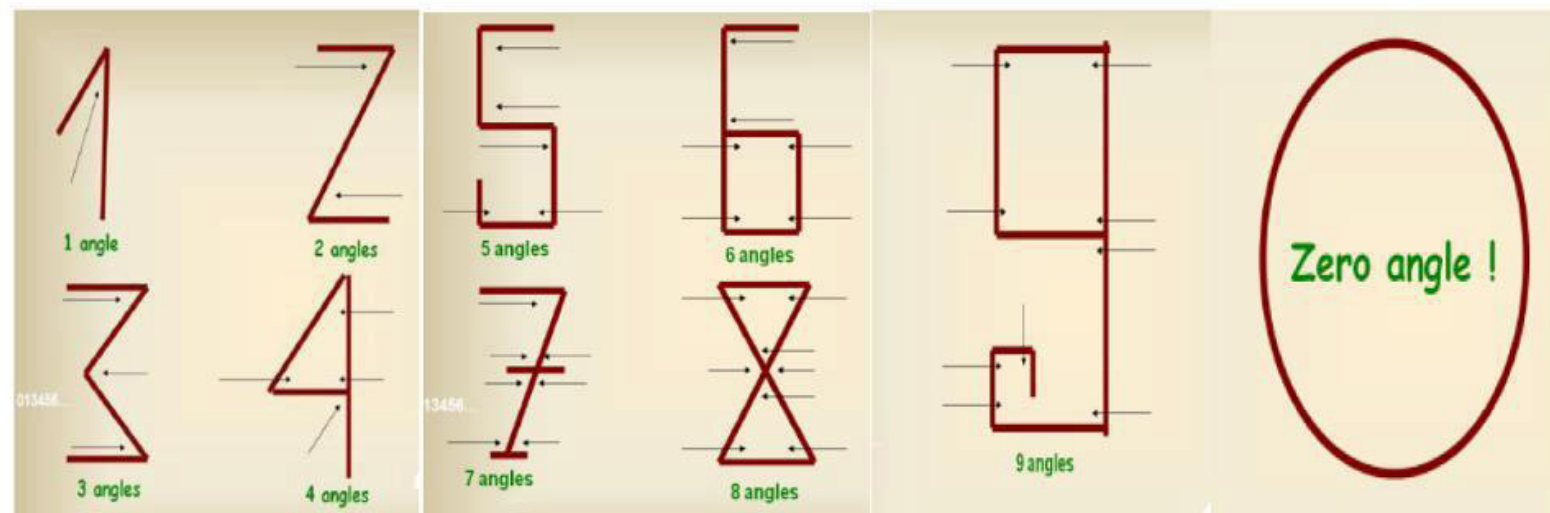
## SIÊU TƯỢNG

## THUYẾT TRÌNH

Các kĩ sư NASA chuẩn bị một buổi thuyết trình vào những năm '60.



TẠI SAO 1 LÀ "MỘT", 2 LÀ "HAI", 3 LÀ BA,... VÀ ĐÂY LÀ LÍ DO



## XÃ HỘI

Một số kẻ nắm quyền bản chất chẳng hơn được ai.

Và kẻ dốt sẽ không nhận ra được điều đó.

Lũ nhu nhược, ích kỉ chỉ biết thực hiện mệnh lệnh đảm bảo cho cái mạng của mình.

Người tiến bộ, dám đấu tranh, nói lên sự thật thì luôn lãnh nhận hậu quả.





## HIỂU BIẾT

Càng hiểu biết nhiều, chúng ta càng thấy thế giới đen tối và bản chất thực của nó.

Nhưng chỉ có con đường học hỏi mới đem lại cho chúng ta hi vọng.



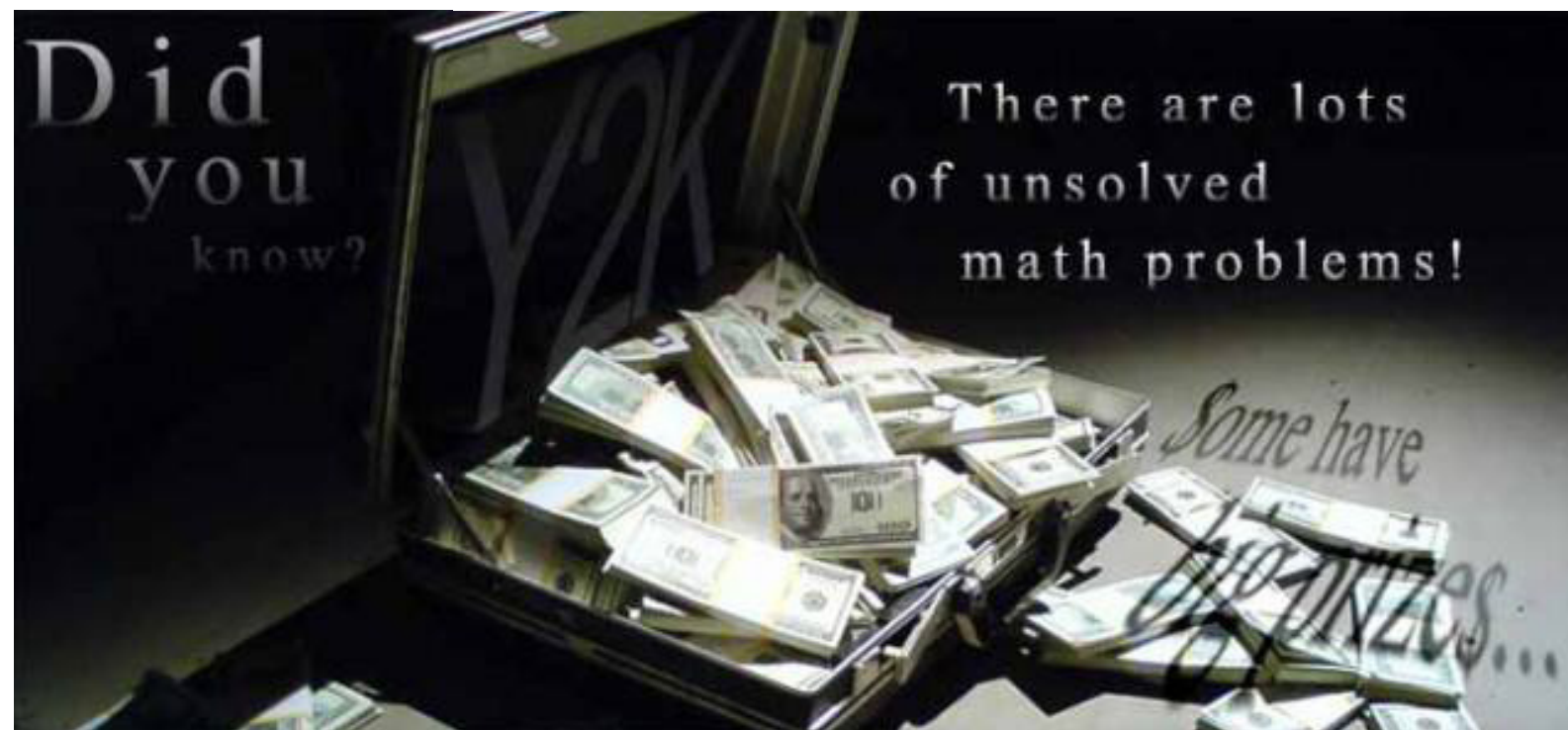
SOLVAY CONFERENCE 1927

colourized by pastincolour.com

A. PICARD E. HENRIOT P. EHRENFEST Ed. HERSEN Th. DE DONDER E. SCHRÖDINGER E. VERSCHAFFELT W. PAULI W. HEISENBERG R.H FOWLER L. BRILLOUIN  
P. DEBYE M. KNUDSEN W.L. BRAGG H.A. KRAMERS P.A.M. DIRAC A.H. COMPTON L. de BROGLIE M. BORN N. BOHR  
I. LANGMUIR M. PLANCK Mme CURIE H.A. LORENTZ A. EINSTEIN P. LANGEVIN Ch.E. GUYE C.T.R. WILSON O.W. RICHARDSON  
Absents : Sir W.H. BRAGG, H. DESLANDRES et E. VAN AUBEL

## SOLVAY 1927

Hội nghị khoa học Solvay 1927, lần quy tụ nhiều nhà Khoa học tài ba nhất trong lịch sử nhân loại. Bức ảnh đã được phục chế từ ảnh trắng đen hồi đó.



## GIẢI THƯỞNG

Rất nhiều vấn đề của Toán học còn chưa giải quyết được.

Một số được treo giải triệu USD.

Bạn có dám đặt mục tiêu?



$$E=MC^2$$

THE FASTER YOU MOVE,  
THE HEAVIER YOU GET.

$$S=\frac{C^3KA}{4\hbar G}$$

INFORMATION ENTERING  
BLACK HOLES ARE LOST FOREVER

$$F_G=\frac{GM_1M_2}{R^2}$$

THE GREATER THE DISTANCE,  
THE LESSER THE FORCE OF ATTRACTION

$$S=K \log W$$

THE TENDENCY TO MOVE FROM ORDER TO  
DISORDER INCREASES AS TIME PROGRESSES

$$T'=T\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$$

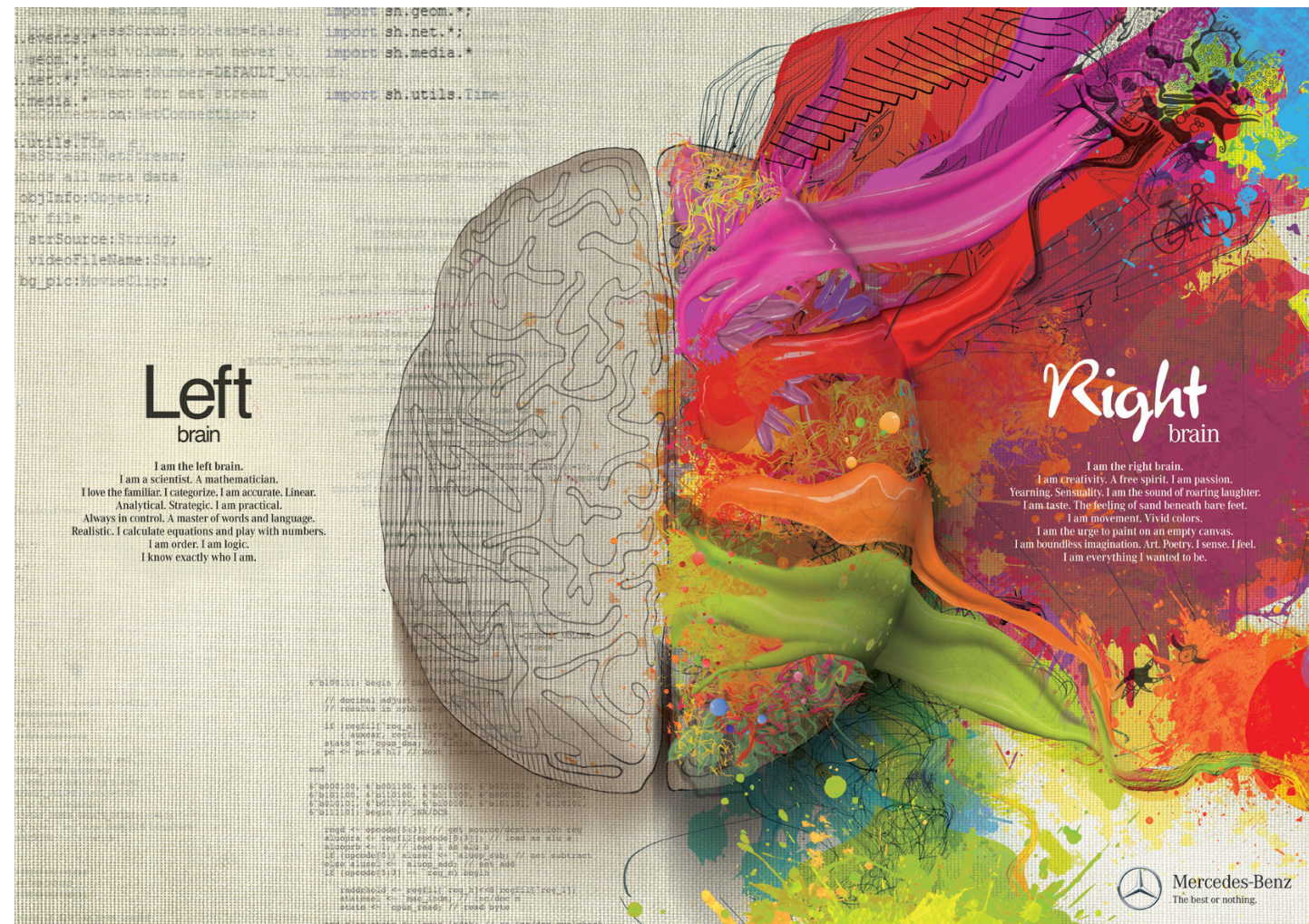
THE FASTER YOU MOVE THROUGH SPACE,  
THE SLOWER YOU MOVE THROUGH TIME

$$F=\frac{KQ_1Q_2}{R^2}$$

OPPOSITE CHARGES ATTRACT,  
SIMILAR CHARGES REPEL

## 6 CÔNG THỨC VĨ ĐẠI NHẤT TRONG VẬT LÝ

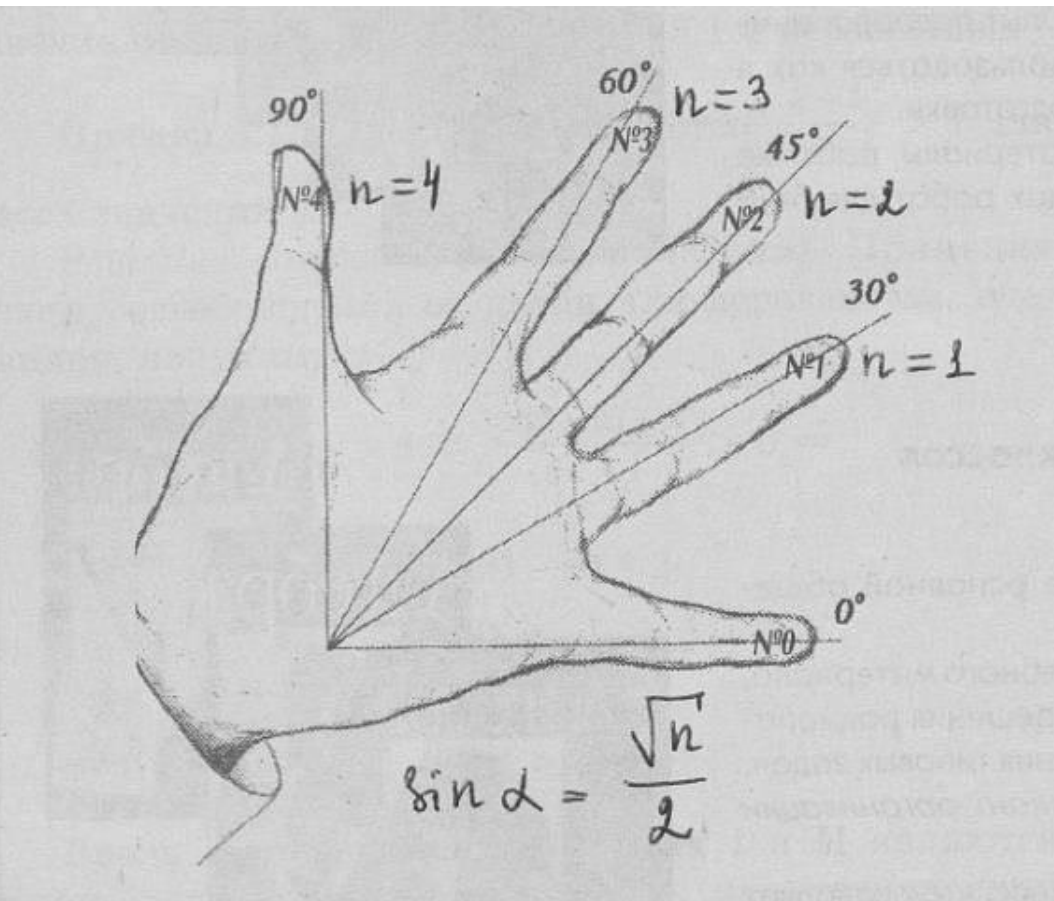
- Di chuyển càng nhanh, năng lượng càng lớn.
- Cuốn vào hố đen, không thể thoát được.
- Khoảng cách càng lớn, lực hấp dẫn càng yếu.
- Thời gian càng dài, hỗn loạn càng tăng.
- Di chuyển xuyên không gian càng nhanh, di chuyển xuyên thời gian càng chậm.
- Trái với lực hút, là một lực đẩy.



## BỘ NÃO

- |  |  |
|--|--|
| Tôi là Não Trái.   | Tôi tên Não Phải.                                |
| Tôi là nhà Khoa học.   | Tôi hoạt động Nghệ thuật.                        |
| Tôi là bậc thầy của ngôn ngữ.                                    | Tôi là bậc thầy của ngôn từ.                     |
| Tôi tính toán các phương trình và chơi với những con số.         | Tôi thích nghệ thuật và thơ ca.                  |
| Tôi suy nghĩ rạch ròi, đúng sai rõ ràng.                         | Tôi cảm giác và cảm nhận.                        |
| Tôi tổ chức, sắp xếp.  | Tôi có khiếu thẩm mỹ.                            |
| Tôi phân tích, hoạch định, thực hành và luôn trong sự kiểm soát. | Tôi khát khao, nhạy cảm, một tâm hồn tự do.      |
| Tôi là nhà sáng tạo.   | Tôi là sự đam mê.                                |
| Tôi yêu thích sự thân thuộc.                                     | Tôi luôn tìm đến những cảm giác mới.             |
| Tôi lý trí. Tôi logic.   | Trí tưởng tượng của tôi vượt ra ngoài khuôn khổ. |
| Tôi thực tế.   | Tôi lãng mạn.                                    |
| Tôi biết chính xác bản thân mình là ai.                          | Tôi là bất cứ ai tôi muốn.                       |





# MỘT CÁCH HAY ĐỂ GHI NHỚ

Giống như Quy tắc bàn tay trong Vật lí, bạn có thể dựa vào đây để nhớ ra sin các góc đặc biệt. Từ đó cũng suy ra được cosin của chúng.

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ (Pythagoras)	Δημόκριτος (Democritus)	P L A T O	E UCLID	ARCHIMEDES ARCHIMEDES
	Kepler	ali e	Leib(n)iz	New t on
Carolus linnæus (Linneus, 1735)	BERNOULLI	Young	faraday	OHM
I think	Kelvin	pasteur	Kuulé	Mendel
Maxwell		Tesla	Röntgen	p/ancK
curie	pavlo	EINSTEIN		BRAGG
Carrel	BOHR		carver	pauli 1s²
Heisenber?	DIRAC DIBVC	CORI	HUSSE	Goöde...
	Schrodinger		Fermi	ralph george hans
F E N M A N	ATGMcCLINTOCKTCATGCATCMcCLINTOCKTGA	Teller	FRANKLIN	CRICK+ Watson
PENROSE	salK	GOODALL	Bor aug	
	Leakey	SANGER	low	lackburn

# LOGO CÁC NHÀ KHOA HỌC

Bạn biết được bao nhiêu người trong số này?



# KIẾN THỨC SOI SÁNG CON ĐƯỜNG

Nếu không có tri thức, đặc biệt là Toán học, nhân loại mãi chìm trong bóng tối.

# THE MULTIVARIABLE ALPHABET

Aα ALPHA	Bβ BETA	Γγ GAMMA	Δδ DELTA	Eε EPSILON
Zζ ZETA	Hη ETA	Θθ THETA	Iι IOTA	Kκ KAPPA
Λλ LAMBDA	Mμ MU	Nν NU	Ξξ XI	Oο OMICRON
Ππ PI	Pρ RHO	Σσ SIGMA	Tτ TAU	Υυ UPSILON
Φφ PHI	Xχ CHI	Ψψ PSI	Ωω OMEGA	

# BẢNG CHỮ CÁI HY LẠP DÙNG TRONG CÁC KÍ HIỆU TOÁN HỌC





## TÊN 50 NHÀ KHOA HỌC NỔI TIẾNG CÙNG LOGO THỂ HIỆN CÔNG TRÌNH PHÁT MINH CỦA HỌ

trong số đó, có 16 nhà Khoa học nữ



**WOMEN IN SCIENCE**  
MEGAN LEE STUDIO, LLC + MEGANLEE.ETSY.COM

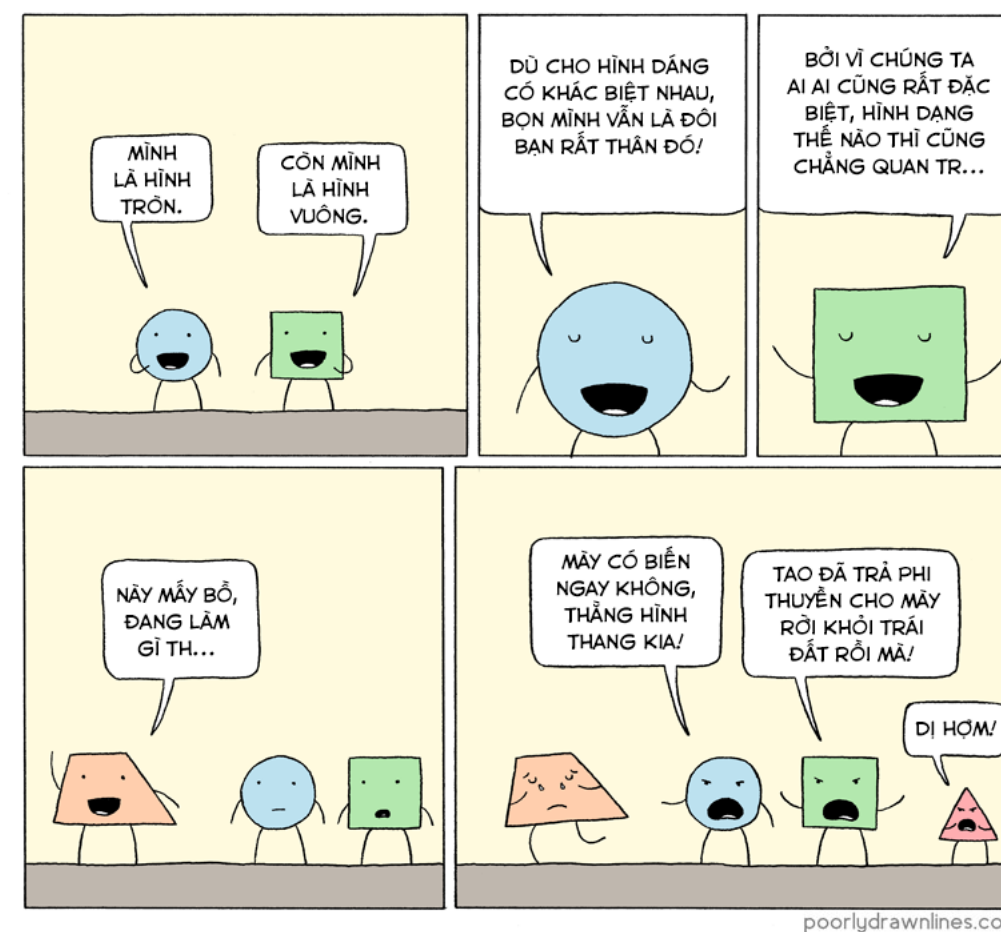




## SỐ ẢO



## THỰC TRẠNG GIÁO DỤC

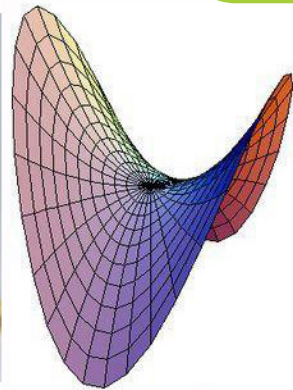


## ĐA GIÁC



## QUÁ TRÌNH HỌC TOÁN

Nếu bạn là một sinh viên chuyên ngành Toán, hẳn bạn sẽ nhận ra một điều Toán học không chỉ đơn thuần là tính Toán những phép tính, xử lí các con số mà hơn thế nữa là những kí hiệu, phép suy luận, quy nạp.



Mỗi lát khoai tây chiên Pringles có hình dạng là mặt cong Hyperbolic Paraboloid. Lí do vì đâu? Sao không phải lát hình tròn?

- Thứ nhất, khi ăn, bạn buộc phải há miệng to và phải nhai, lát khoai tây giòn sẽ vỡ vụn, làm thấm mọi gia vị lên đầu lưỡi. Còn với lát tròn, nó sẽ tan ra nhanh.
- Thứ hai, để tăng doanh thu cho nhà sản xuất, những lát khoai như thế sẽ không phủ hết không gian trong hộp bánh hình trụ như là những lát khoai tròn.
- Thứ ba, rõ ràng là lát khoai Hyperbolic Paraboloid bắt mắt hơn rất nhiều.

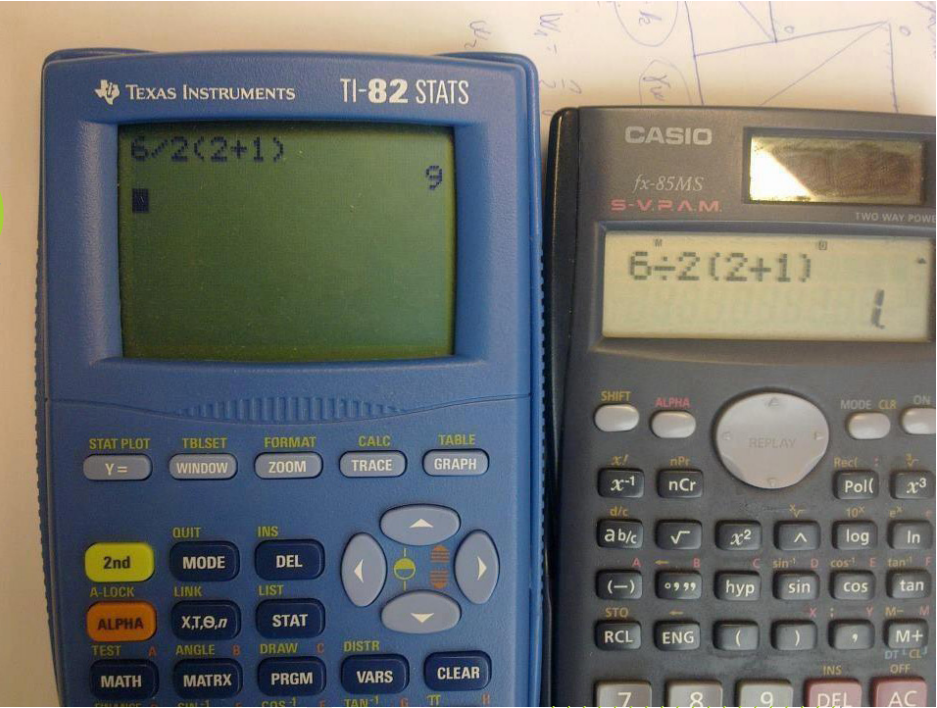
## MỖI SÁNG THỨC DẬY

Thật phức tạp, phải không các bạn?



## MÁY TÍNH

Hãy cẩn thận khi sử dụng máy tính. Rất có thể bạn tính sai mà không hay.



## RÚT GỌN PHÂN SỐ

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

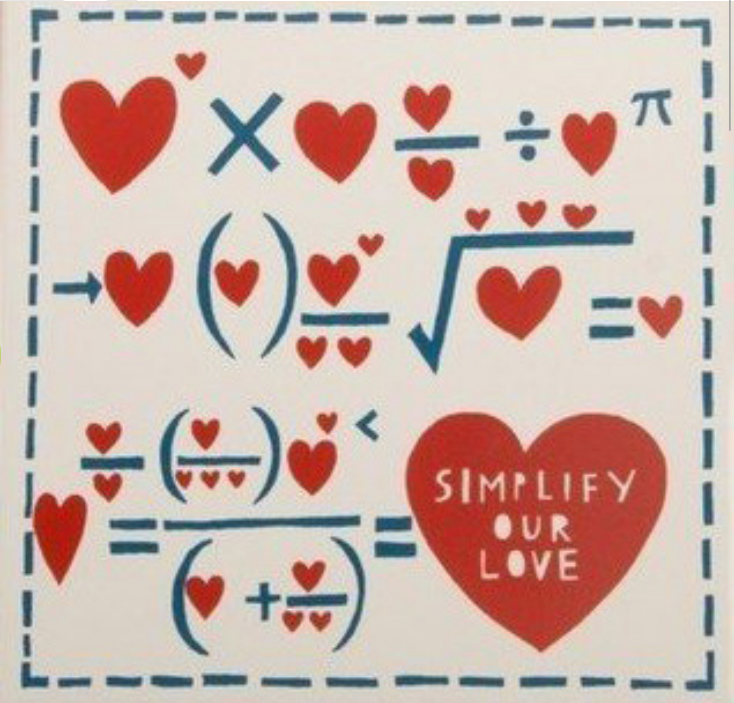
Ví dụ này cho chúng ta thấy kết quả đúng nhưng bước làm chưa hẳn đúng. Bởi vậy, việc trình bày một bài Toán phải thật chính xác.

## TOÁN HỌC & THƠ XUÂN DIỆU

Đề bài: Hãy bình luận các câu thơ sau của Xuân Diệu:

Có một dạo em ngồi xa anh quá  
Anh bảo em ngồi xích lại gần hơn  
Em ngồi gần anh lại thấy xa hơn  
(Trích Xa cách)

Một học sinh chuyên Toán đã bình luận như sau:  
Trên trục số của Toán học, gọi a là tọa độ chỗ anh ngồi, e là tọa độ nơi em đấy và y là khoảng cách trong tâm trí anh,  $y = f(e)$ , y là hàm số của e. “Em ngồi gần anh lại thấy xa hơn” Câu thơ cho thấy e - a càng nhỏ thì  $y = f(e)$  lại càng lớn.  
Thế nên hàm số  $y = f(e)$  có thể viết dưới dạng  $y = f(e) = k/(e - a)$ , ở nơi đó k là một hằng số khác 0 em à.



Rõ ràng khi e tiến tới a ( $e - a = 0$ ), tức em càng gần anh, thì  $y = f(e)$  càng tiến tới vô cùng, anh lại thấy xa hơn.  
Nghe nói khi Xuân Diệu đọc bài bình luận này, ông đã phải thốt lên rằng:  
*Trần nằm trong cõi người ta  
Chữ Tình, chữ Toán khéo là hợp nhau.*



TOÁN HỌC KÌ THỨ

TOÁN HỌC KÌ THỨ